1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les angles orientés (3)

Dans tous les exercices, le plan est orienté.

1 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{5}$.

Déterminer la mesure principale en radians des angles orientés $\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)$, $\left(\vec{v}\,;-\vec{u}\right)$, $\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)$ en détaillant bien toutes les étapes et en appliquant chaque fois une règle par étape.

2 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{7\pi}{6}$ et $\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\dfrac{4\pi}{3}$.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

3 Soit ABC un triangle tel que $AB=6$ cm, $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{5}$ et $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$.

Construire ABC à l'aide du rapporteur.

Indiquer les mesures principales des angles orientés $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$ sur la figure.

En utilisant les propriétés des angles orientés, déterminer la mesure principale en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CA}\right)$.

4 Soit ABC un triangle quelconque.

Calculer en utilisant les propriétés des angles orientés la somme $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$.

On n'utilisera pas la somme des mesures des angles géométriques d'un triangle.

5 Soit ABCD un parallélogramme tel que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{3\pi}{5}$.

Faire une figure en utilisant le rapporteur. On prendra (AB) « horizontale » et A à gauche de B.

Indiquer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$ sur la figure.

Déterminer une mesure en radians de chacun des angles orientés $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)$, $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right)$.

On détaillera bien chaque étape et l'on n'utilisera qu'une seule règle à chaque étape.

6 Soit A, B, C, D, E tels que l'on ait $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{12}$, $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$, $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AE}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$.

On suppose que A est distinct des points B, C, D, E.

Aucune figure n'est demandée dans cet exercice.

Démontrer que les points A, D, E sont alignés.

7 Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on note M et N les images respectives des réels $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

Placer M et N sur le cercle à l'aide du compas. On prendra 4 cm ou 4 « gros » carreaux pour unité graphique.

Déterminer la nature du triangle OMN.

8 Soit ABCD un carré direct de centre O dans le plan orienté.

En utilisant les règles sur les angles orientés (toutes les règles sauf la relation de Chasles) et uniquement ces règles (c'est-à-dire sans introduire de nouveaux points), déterminer par le calcul une mesure en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{OD}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DO}\,;\overrightarrow{BC}\right)$.

Corrigé

$\boxed{1}$ $(\vec{u}\,;\vec{v})=\dfrac{\pi}{5}$

Il est inutile de faire une figure.
En tout cas, si on fait une figure, on trace les deux vecteurs sans faire figurer de cercle trigonométrique.

Attention, l'énoncé demande chaque fois la mesure principale de l'angle orienté.

$(\vec{u}\,;-\vec{v})=-\dfrac{4\pi}{5}$

En appliquant les règles sur les mesures d'angles orientés, on trouve $(\vec{u}\,;-\vec{v})=\dfrac{6\pi}{5}$.

$\dfrac{6\pi}{5}$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,;-\vec{v})$ mais ce n'est pas la mesure principale car $\dfrac{6\pi}{5}$ n'appartient pas à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Pour trouver la mesure principale, on peut retrancher 2π.

$\dfrac{6\pi}{5}-2\pi=-\dfrac{4\pi}{5}$

La mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}\,;-\vec{v})$ est $-\dfrac{4\pi}{5}$.

N.B. :

Quand on a une mesure d'un angle orienté de vecteurs, on peut toujours ajouter ou retrancher un multiple entier de 2π.
On applique la technique générale pour les mesures principales uniquement lorsque l'on a des « gros nombres ». Ici, les nombres sont petits ce qui explique que l'on procède autrement.

$(\vec{v}\,;-\vec{u})=\dfrac{4\pi}{5}$

$(-\vec{u}\,;-\vec{v})=\dfrac{\pi}{5}$

Solution détaillée :

$(\vec{u}\,;\vec{v})=\dfrac{\pi}{5}$

● Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;-\vec{v})$.

$(\vec{u}\,;-\vec{v})=(\vec{u}\,;\vec{v})+\pi$

$(\vec{u}\,;-\vec{v})=\dfrac{\pi}{5}+\pi$

$(\vec{u}\,;-\vec{v})=\dfrac{6\pi}{5}$

$(\vec{u}\,;-\vec{v})=\dfrac{6\pi}{5}-2\pi$

$(\vec{u}\,;-\vec{v})=-\dfrac{4\pi}{5}$

$-\dfrac{4\pi}{5}\in\,]-\pi\,;\pi]$

La mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}\,;-\vec{v})$ est $-\dfrac{4\pi}{5}$.

Autre méthode plus astucieuse qui a l'avantage de donner tout de suite la mesure principale :
écrire $(\vec{u}\,;-\vec{v})=(\vec{u}\,;\vec{v})-\pi$

● Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\vec{v}\,;-\vec{u})$.

$(\vec{v}\,;-\vec{u})=(\vec{v}\,;\vec{u})+\pi$

$(\vec{v}\,;-\vec{u})=-(\vec{u}\,;\vec{v})+\pi$

$(\vec{v}\,;-\vec{u})=-\dfrac{\pi}{5}+\pi$

$(\vec{v}\,;-\vec{u})=\dfrac{4\pi}{5}$

$\dfrac{4\pi}{5}\in\,]-\pi\,;\pi]$

La mesure principale de l'angle orienté $(\vec{v}\,;-\vec{u})$ est $\dfrac{4\pi}{5}$.

• Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)$.

$\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$

$\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\frac{\pi}{5}$

$\frac{\pi}{5}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

La mesure principale de l'angle orienté $\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)$ est $\frac{\pi}{5}$.

$\boxed{2}$ $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\frac{7\pi}{6}$; $\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\frac{4\pi}{3}$

Démontrons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

D'après la relation de Chasles, on a :

$\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)$

$\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\frac{7\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}$

$\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\frac{15\pi}{6}$

$\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\frac{5\pi}{2}$

$2\times2<5<2\times3$

$\frac{5\pi}{2}=\frac{2\times2\pi+\pi}{2}$

$=2\pi+\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\frac{\pi}{2}$

L'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$ est un angle droit direct.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux (c'est-à-dire que leurs directions sont orthogonales).

$\boxed{3}$ On convertit $\frac{\pi}{5}$ rad $=36°$ pour faire la figure.

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{4\pi}{5}$; $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\frac{19\pi}{30}$; $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{5}$.

On pourrait aussi utiliser la somme des mesures des angles géométriques dans un triangle (mais dans ce cas, il faut regarder l'orientation pour déterminer des mesures d'angles orientés).

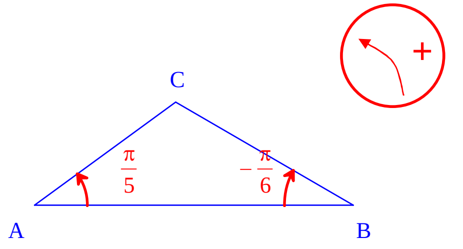
Il faut dire que $\frac{19\pi}{30}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ (c'est à peu près évident : $0<\frac{19}{30}<1$ car $\frac{19}{30}$ est une fraction dont le numérateur est inférieur ou égal au dénominateur).

Solution détaillée :

$AB=6\text{ cm}$

$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{5}$

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{6}$



• Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\left(-\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\pi$

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{6\pi}{5}$

$5\times1<6<5\times2$

$\frac{6\pi}{5}=\frac{5\times2\pi-4\pi}{2}$

$=2\pi-\frac{4\pi}{5}$

$-\frac{4\pi}{5}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est $-\frac{4\pi}{5}$.

• Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$.

$\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$

$\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\left(-\overrightarrow{AC}\,;-\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;-\overrightarrow{BC}\right)$

$\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)+\pi$

$\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}+\pi$

$\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\frac{19\pi}{30}$

$\frac{19\pi}{30}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$ est $\frac{19\pi}{30}$.

• Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CA}\right)$.

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CA}\right)=\left(-\overrightarrow{AB}\,;-\overrightarrow{AC}\right)$

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{5}$.

$\frac{\pi}{5}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CA}\right)$ est $\frac{\pi}{5}$.

Retenir la rédaction-type :

La mesure principale en radians de l'angle orienté …… est …...

$\boxed{4}$ On ne peut pas utiliser la somme des mesures des angles géométriques dans un triangle.

$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\pi$

Solution détaillée :

Calculons la somme $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$.

Il y a plusieurs manières de résoudre le problème.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)&=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(-\overrightarrow{AC}\,;-\overrightarrow{BC}\right)\\&=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{BC}\right)\\&=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)\\&=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BA}\right)\\&=\pi \text{ car les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BA} \text{ sont colinéaires de sens contraires}\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ On a : $\frac{180\times 3\pi}{5\pi}=108$.

L'angle $\widehat{BAD}$ mesure 108°.

$\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)=\frac{2\pi}{5}$; $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\frac{3\pi}{5}$; $\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right)=\frac{2\pi}{5}$

N.B. : On pourrait aussi utiliser les propriétés des angles géométriques dans un parallélogramme vues en 5^e :
Dans un parallélogramme, les angles consécutifs sont supplémentaires et les angles opposés ont la même mesure. Il s'agit dans les deux cas d'angles géométriques.
Cela dit, ce n'est pas trop l'esprit de ce type d'exercice : on aime mieux rester uniquement avec les angles orientés et utiliser les règles sur les angles orientés. En effet, si l'on utilisait les angles géométriques, pour repasser en angles orientés on serait obligé de regarder la figure pour l'orientation.

Quelques détails :

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$.
Par conséquent, $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{BA}\,;-\overrightarrow{BC}\right)$
On peut contrôler sur la figure.
Il y a plusieurs méthodes (bien évidemment).
On peut par exemple écrire :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right)&=\left(-\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AB}\right)\\&=\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AB}\right)+\pi\\&=-\frac{3\pi}{5}+\pi\\&=\frac{2\pi}{5}\end{aligned}$$

On peut observer sur la figure la propriété : $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right)$.

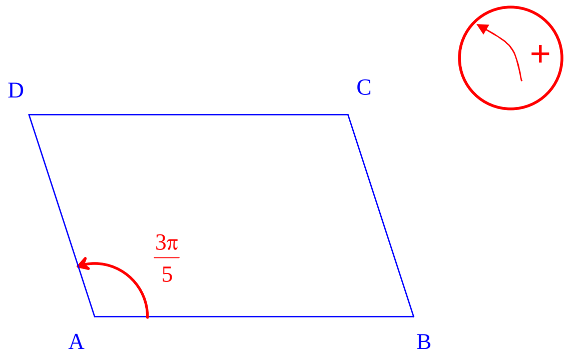
Il faut bien observer que l'on tourne dans le même sens pour les deux angles (ce n'est pas toujours évident à voir).

Rappel d'une propriété des angles géométriques d'un parallélogramme :
Dans un parallélogramme, deux angles géométriques opposés ont la même mesure et deux angles consécutifs sont supplémentaires.

Solution détaillée :

ABCD parallélogramme

$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{3\pi}{5}$



• Déterminons une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)$.

$\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{AD}\,;-\overrightarrow{AB}\right)$

$\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AB}\right)+\pi$

$\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)=-\dfrac{3\pi}{5}+\pi$

$\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{2\pi}{5}$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)$ est égale à $\dfrac{2\pi}{5}$.

• Déterminons une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)$.

$\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{BA}\,;-\overrightarrow{BC}\right)$

$\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)+\pi$

$\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{2\pi}{5}+\pi$

$\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{3\pi}{5}$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)$ est égale à $\dfrac{3\pi}{5}$.

• Déterminons une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right)$.

$\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{AB}\right)$

$\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right)=\left(-\overrightarrow{BC}\,;-\overrightarrow{BA}\right)$

$\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)$

$\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right)=\dfrac{2\pi}{5}$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right)$ est égale à $\dfrac{2\pi}{5}$.

On n'utilise pas les propriétés de 5^{e} sur les angles géométriques dans un parallélogramme (on reste avec des angles orientés).

$\boxed{\textbf{6}}$ On suppose qu'aucun des points B, C, D, E ne soit confondu avec A
On démontre en utilisant la relation de Chasles que : $\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires de même sens. Par conséquent, les points A, D, E sont alignés.

N.B. : La méthode qui consiste à démontrer que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ n'est pas très satisfaisante (mais elle « marche »).

Solution détaillée :

$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{12}$

$\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$

$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AE}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$

Démontrons que les points A, D, E sont alignés.

D'après la relation de Chasles, on a :

$\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)=\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AE}\right)$

$\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}$

$\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)=0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires de même sens.

On en déduit que les points A, D, E sont alignés.

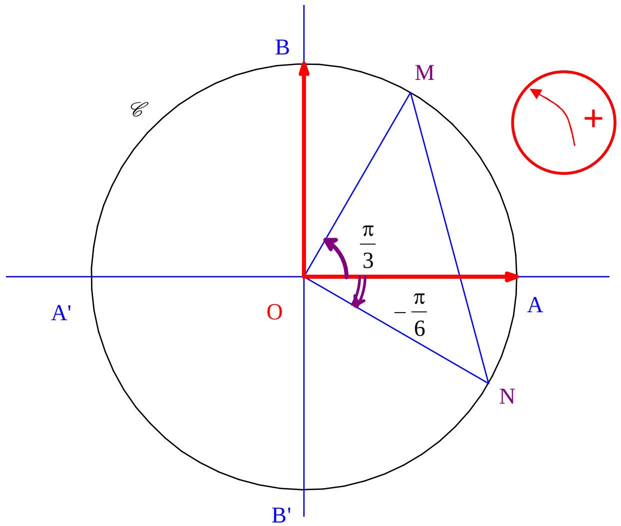
$\boxed{7}$ Le triangle OMN est rectangle isocèle en O.

Pour démontrer ce résultat, on utilise la géométrie et les angles orientés (on utilise la géométrie pour dire que comme M et N appartiennent au cercle trigonométrique, on a : $OM = ON = 1$ donc OMN est isocèle en O).

Solution détaillée :

M : image de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique

N : image de $-\frac{\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique



Déterminons la nature du triangle OMN.

Par hypothèse, M et N appartiennent au cercle $\mathscr{C}$, donc on a $OM = ON = 1$. Par suite, le triangle OMN est isocèle en O.

M est l'image de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{3}$.

N est l'image de $-\frac{\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{ON}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

D'après la relation de Chasles pour les angles orientés, on a :

$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right) = \left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{ON}\right)$ (on décompose l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right)$)

$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right) = -\frac{\pi}{2}$

On en déduit que $\widehat{MON} = \frac{\pi}{2}$.

Par suite, le triangle OMN est rectangle en O.

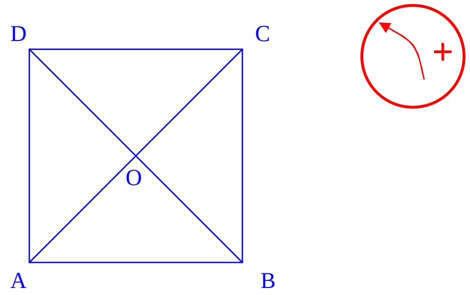
Conclusion :

Le triangle OMN est rectangle isocèle en O.

On pourrait utiliser les angles géométriques pour démontrer directement que l'angle $\widehat{MON}$ est droit.

$\boxed{\mathbf{8}}$

On commence par faire une figure.



$\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{DC}\,;-\overrightarrow{DO}\right)$

$\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DO}\right) + \pi$

$\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{OD}\right) = -\frac{\pi}{4} + \pi$

$\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{OD}\right) = \frac{3\pi}{4}$

$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BD}\right) = \left(-\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BD}\right)$

$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BD}\right) + \pi$

$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BD}\right) = -\frac{\pi}{4} + \pi$

$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BD}\right) = \frac{3\pi}{4}$

$\left(\overrightarrow{DO}\,;\overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{BC}\right)$

$\left(\overrightarrow{DO}\,;\overrightarrow{BC}\right) = \left(-\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{BC}\right)$

$\left(\overrightarrow{DO}\,;\overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{BC}\right) + \pi$

$\left(\overrightarrow{DO}\,;\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{4} + \pi$

$\left(\overrightarrow{DO}\,;\overrightarrow{BC}\right) = \frac{3\pi}{4}$

On vérifie toutes ces mesures sur la figure.

On vérifie les mesures sur la figure (en déplaçant des vecteurs).