$1^{\text{ère}}$ S — Approche de la limite d'une suite

Objectif du chapitre : aborder le concept de limite pour les suites (étude du comportement asymptotique d'une suite).

I. Avant de commencer le chapitre

1°) La notion de limite de fonction a été entrevue avec l'étude de la dérivée d'une fonction (définition du nombre dérivé d'une fonction comme limite en 0 du taux de variation). À cette occasion, on a d'ailleurs vu l'écriture symbolique d'une limite.
Dans ce chapitre, on va s'intéresser à la notion de limite de suite.

2°) Avant de commencer, il est important de rappeler qu'une suite est définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$ (pour les suites définies à partir d'un certain indice).

3°) Étudier la limite d'une suite, c'est étudier le comportement de ses termes lorsque l'indice tend vers + ∞.
(lorsque l'on étudie la limite d'une suite (u_n) cela signifie que l'on étudie le comportement des termes u_n de la suite lorsque l'indice tend vers + ∞, c'est-à-dire lorsque *n* prend des valeurs entières de plus en plus grandes).

4°) Ce chapitre va être l'occasion d'apprendre un vocabulaire spécifique aux suites : **convergence, divergence** qui sera mis en place à l'occasion d'exemples.

On va s'appuyer sur deux aspects :

- **cadre numérique** avec l'utilisation de moyens de calculs (calculatrices, logiciels de calculs formels) ;

- **cadre graphique** en utilisant les mêmes moyens.

On verra également en exercice l'intervention du **cadre algorithmique**.

Aucun résultat ne sera démontré cette année. Il ne s'agit que d'une approche, en essayant de comprendre intuitivement ce qui se passe.
Les notions seront reprises et précisées en Terminale.

II. Notion de limite finie (convergence)

1°) Exemple concret

On étudie l'évolution d'une population animale.
Cette population diminue de 4 % par an.
Elle compte initialement 1 000 individus.

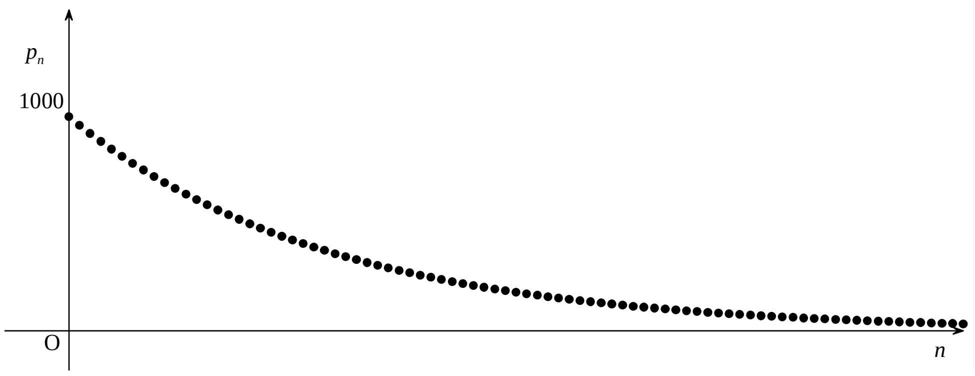
2°) Modélisation mathématique

On note p_n la population au bout de *n* années.

$p_0 = 1000$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = 0{,}96\, p_n$

Donc la suite (p_n) est une suite géométrique de premier terme $p_0 = 1000$ et de raison $q = 0{,}96$.

La représentation graphique de la suite donne le nuage de points ci-dessous.



Les points de la représentation graphique de la suite se rapprochent de l'axe des abscisses sans jamais le toucher (même si on peut avoir l'impression que les derniers points touchent la pointe de la flèche indiquant le sens positif de l'axe).

Les termes de la suite se rapprochent de 0 sans jamais être égaux à 0 (ils restent toujours strictement positifs).

On dit que 0 est la limite de la suite (p_n) ; cette valeur n'est jamais atteinte.

Concrètement, on a un phénomène d'extinction.

3°) Vocabulaire et écritures symboliques

- « p_n tend vers 0 quand *n* tend vers + ∞ ».

$p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

- « La limite de p_n quand *n* tend vers + ∞ est égale à 0 ».

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$

- « La suite (p_n) **converge** vers 0 ».

III. Notion de limite infinie (divergence)

1°) Exemple concret

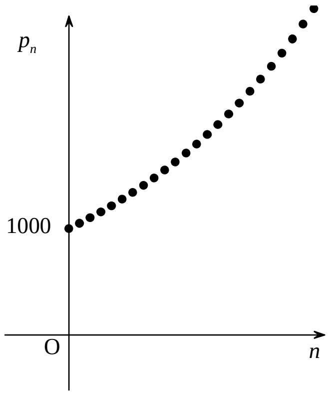
On étudie l'évolution d'une population animale.
Cette population augmente de 10 % par an.
Elle compte initialement 1000 individus.

2°) Modélisation mathématique

On note p_n la population au bout de n années.

$p_0 = 1000$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = 1{,}1 p_n$

Donc la suite (p_n) est une suite géométrique de premier terme $p_0 = 1000$ et de raison $q = 1{,}1$.



Concrètement, on a un phénomène d'expansion.

3°) Vocabulaire et écritures symboliques

● « p_n tend vers + ∞ quand n tend vers + ∞ ».

$p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

● « La limite de p_n quand n tend vers + ∞ est égale à + ∞ ».

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = +\infty$

● « La suite (p_n) **diverge** vers + ∞ ».

On peut dire que la suite (p_n) est divergente vers + ∞.

IV. Premier bilan des notions et vocabulaire

1°) Quelques idées intuitives

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ $(l \in \mathbb{R})$	**Tous les termes s'accumulent autour de l lorsque $n \to +\infty$.**
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	**Tous les termes deviennent de plus en plus grands lorsque $n \to +\infty$.**
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$	**Tous les termes deviennent de plus en plus petits lorsque $n \to +\infty$.**

2°) Convergence – divergence

Suite convergente	Suite qui admet une limite finie.
Suite divergente	Suite qui n'admet pas une limite finie.

3°) Remarques

● Les définitions seront reprises en Terminale.

● Lorsqu'une suite est divergente, il y a deux cas possibles :

- soit la suite admet une limite infinie (+ ∞ ou – ∞) ;

- soit la suite n'admet pas de limite

● On ne met jamais de quantificateur avant une limite (pas de $\forall n$ avant une limite).

4°) Exemples

$u_n = \dfrac{1}{n}$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$	**convergente**
$u_n = n^2$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	**divergente**
$u_n = (-1)^n$	(u_n) n'a pas de limite	**divergente**

Les résultats des limites donnés dans la deuxième colonne sont donnés intuitivement sans démonstration.
On obtient les limites des deux premières suites en remplaçant n dans sa tête par des valeurs entières de plus en plus grandes (aspect numérique). On peut aussi se référer à la représentation graphique de ces deux suites (aspect graphique).

Pour la troisième suite, la représentation graphique fait apparaître un comportement oscillant (la suite est périodique de période 2). La suite prend alternativement les valeurs 1 et – 1. Elle n'a pas de limite.

V. Quelques limites de référence

1°) Résultats admis

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (n) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (n^3) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

2°) Vitesse ou rapidité de convergence

Pour les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)$, il est intéressant de souligner qu'elles convergent toutes vers 0 mais toutes de plus en plus « vite ».

VI. Quelques précision sur les définitions

1°) Suite qui tend vers + ∞ ou vers – ∞

• Deux idées

- Lorsque qu'une suite tend vers + ∞, on peut dire que tous les termes deviennent de plus en plus grands.

- Plus précisément, on peut dire que tous les termes finissent par dépasser n'importe quelle valeur.

• Vers une définition

- La première idée est trop vague pour donner une définition.

- La deuxième idée en revanche permettra de donner une définition rigoureuse.
Cette idée sera exploitée en exercices cette année avec la recherche de valeurs seuils.

2°) Suite qui tend vers un réel

• Une idée

Lorsque qu'une suite tend vers un réel ℓ, on peut dire que tous les termes deviennent de plus en plus proches de réel ℓ.

• Vers une définition

Cette idée est trop vague, peu précise.
Ce serait une définition insuffisante pour faire des démonstrations.
Une définition rigoureuse sera donnée en Terminale en utilisant une autre idée.