1$^{\text{ère}}$ S

Relations métriques dans le triangle

Plan du chapitre :

Ensemble des poins M tels que $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\| = a$

- Dans ce chapitre, toutes les démonstrations sont à connaître et à savoir refaire.

- Le paragraphe **I** est indépendant des autres.

- On étudiera avec attention les rappels donnés en appendice.

À propos du titre :

- Le terme de *relation* est à prendre au sens d'égalité (exemple : relation de Chasles).

- L'adjectif *métrique* signifie « qui se rapporte à des distances ».

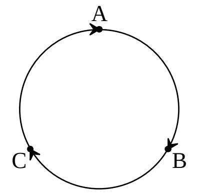
Dans tout le chapitre, une unité de longueur est fixée dans le plan *P*.

I. Théorème de Pythagore généralisé (formule du côté ou d'Al-Kashi)

1°) Formule (à mémoriser et à savoir redémontrer)

Soit A, B, C trois points quelconques du plan.
On a $\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)}$.

Par **permutation circulaire** des lettres A, B, C, on peut aussi écrire :



$$CA^2 = BC^2 + BA^2 - 2\left(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}\right)$$

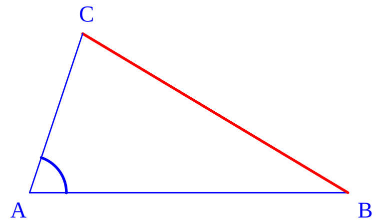
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2\left(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\right)$$

On écrit souvent l'égalité de la propriété sans écrire de parenthèses autour du produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}$$

2°) Démonstration

Figure :



$$\begin{aligned} BC^2 &= \overrightarrow{BC}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\ &= \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) \qquad \text{(identité remarquable scalaire)} \end{aligned}$$

La démonstration s'appuie sur la règle suivante :
« On peut passer tout carré de distance en carré scalaire de vecteur. »

Variante :

$$\begin{aligned}
BC^2 &= \overrightarrow{BC}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2 \\
&= \overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}\right) \\
&= \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\left(\left(-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}\right) \\
&= \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)
\end{aligned}$$

Avec cette variante, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$ est à transformer.

3°) Conséquence : « formule du côté »

Soit A, B, C trois points quelconques tels que $B \neq A$ et $C \neq A$.
On a $\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{A}}$.

4°) Remarque

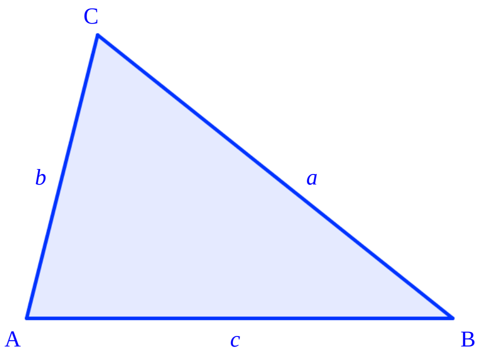
La formule d'Al-Kashi généralise le théorème de Pythagore vu en 4[e].

En effet, lorsque l'angle $\widehat{BAC}$ est droit (c'est-à-dire que le triangle ABC est rectangle en A), alors $\widehat{A}=\dfrac{\pi}{2}$ et $\cos\widehat{A}=0$. Donc la relation s'écrit : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

5°) Cas d'un triangle

On considère un triangle quelconque ABC. On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Chaque lettre minuscule désigne la longueur du côté opposé à l'angle nommé avec la même lettre en majuscule.



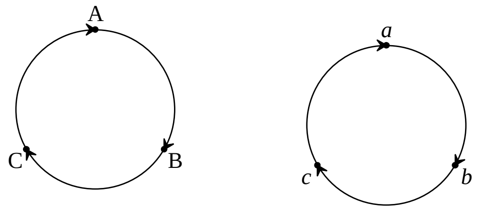
On peut écrire les relations :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$

Ces relations s'obtiennent à partir de la première par **permutation circulaire** des lettres A, B, C et des lettres *a*, *b*, *c*.



6°) Utilisation pratique

La formule du côté permet de calculer la longueur d'un côté d'un triangle quelconque connaissant les longueurs des deux autres côtés et l'angle qu'ils forment.
Elle permet aussi de calculer les angles d'un triangle connaissant les longueurs des côtés.

7°) Retour sur le théorème de Pythagore

A, B, C sont trois points quelconques du plan.

On sait que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$. On en déduit que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}=0 \\
&\Leftrightarrow AB^2+AC^2-BC^2=0 \\
&\Leftrightarrow AB^2+AC^2=BC^2
\end{aligned}$$

Lorsque A, B, C sont deux à deux distincts, on retrouve le théorème de Pythagore et sa réciproque :

$$\text{ABC est rectangle en A} \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

II. Aire d'un triangle quelconque

1°) Longueur d'une hauteur dans un triangle quelconque

ABC est un triangle quelconque.

On pose $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$.

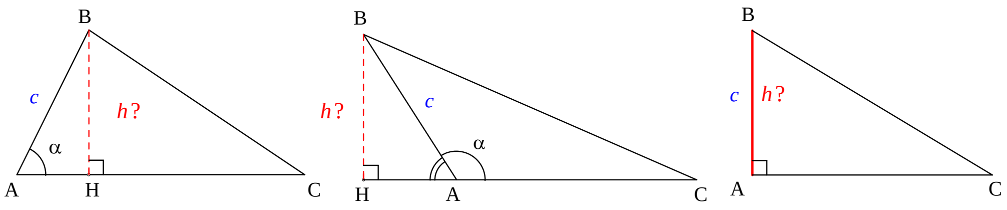
On pose $\widehat{\mathrm{BAC}} = \alpha$ $\quad (\alpha \in [0\,;\pi])$.

On note H le pied de la hauteur issue de B.

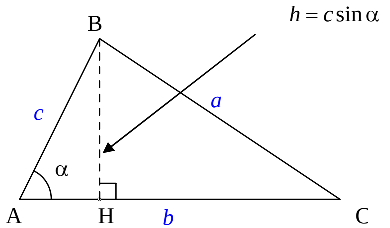
On pose $\mathrm{BH} = h$.

On va chercher h en fonction de c et de α.

On effectue **une démonstration par disjonction de cas** selon que $\widehat{\mathrm{A}}$ est aigu, obtus ou droit.



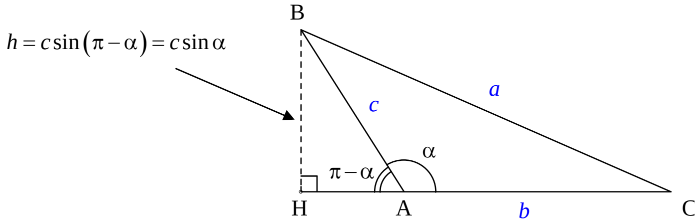
• **1er cas :** $\widehat{\mathrm{A}}$ aigu $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$



On travaille dans le triangle ABH rectangle en H.

On a $\sin\widehat{\mathrm{BAH}} = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AC}}$ soit $\sin\alpha = \dfrac{h}{c}$.

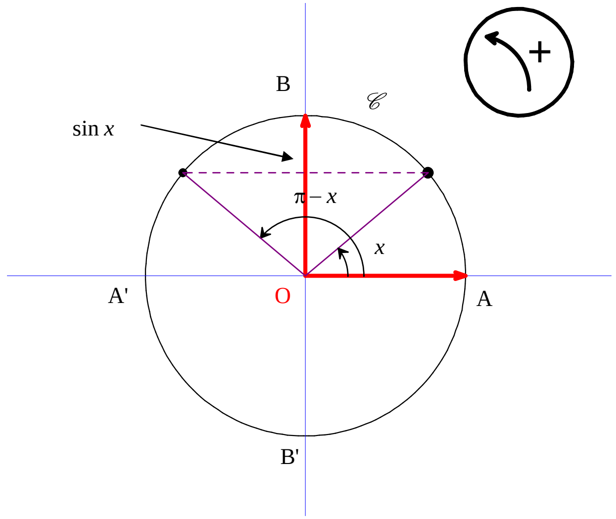
• **2e cas :** $\widehat{\mathrm{A}}$ obtus $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$



On travaille dans le triangle ABH rectangle en H.

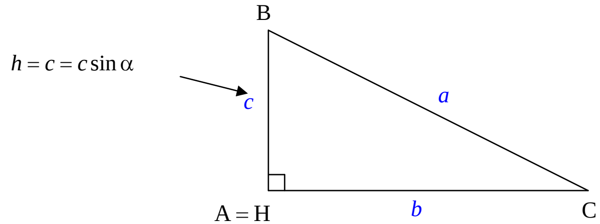
On a $\sin\widehat{\mathrm{BAH}} = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AC}}$ soit $\sin(\pi - \alpha) = \dfrac{h}{c}$.

On utilise ensuite la formule de trigonométrie : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$ dont l'illustration est rappelée sur le cercle trigonométrique ci-dessous (lecture du sinus sur l'axe des ordonnées ; utilisation de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées).



On peut donc écrire $\sin\alpha = \dfrac{h}{c}$.

• **3e cas :** $\widehat{\mathrm{A}}$ droit $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{2}\right)$



En effet, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

Bilan : Dans les 3 cas, on peut écrire $h = c \times \sin\alpha$.

On a donc $\boxed{h = c \times \sin\widehat{\mathrm{A}}}$.

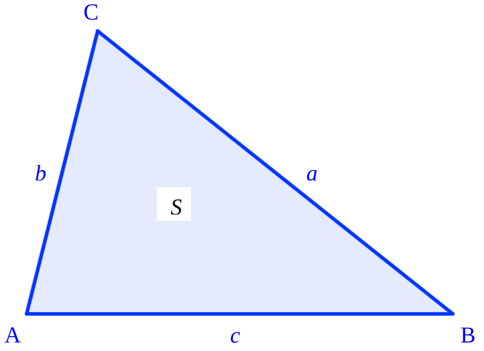
On sait que l'aire du triangle ABC est $S = \dfrac{\mathrm{AC} \times \mathrm{BH}}{2}$ $\left(\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}\right)$ soit $S = \dfrac{b \times h}{2}$.

Grâce au résultat établi sur l'expression de *h*, on peut écrire $S = \dfrac{bc\sin\widehat{\mathrm{A}}}{2}$.

2°) Formule de l'aire d'un triangle quelconque

ABC est un triangle quelconque.
On pose $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$.

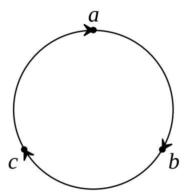
L'aire du triangle ABC est donnée par la formule : $\boldsymbol{S = \dfrac{1}{2} bc \sin\widehat{\mathrm{A}}}$.



Cette formule est valable dans un triangle quelconque.

Il convient de noter que cette formule généralise la formule de l'aire d'un triangle rectangle vue en 6e.

3°) Conséquence



$$S = \frac{1}{2} bc \sin\widehat{\mathrm{A}}$$
$$S = \frac{1}{2} ca \sin\widehat{\mathrm{B}}$$
$$S = \frac{1}{2} ab \sin\widehat{\mathrm{C}}$$

III. Formule des sinus

1°) Démonstration

On reprend les mêmes notations qu'au **II.** : ABC est un triangle quelconque.

$$2S = bc\sin\widehat{\mathrm{A}} = ca\sin\widehat{\mathrm{B}} = ab\sin\widehat{\mathrm{C}}$$

: (abc)

$$\frac{2S}{abc} = \frac{bc\sin\widehat{\mathrm{A}}}{abc} = \frac{ca\sin\widehat{\mathrm{B}}}{abc} = \frac{ab\sin\widehat{\mathrm{C}}}{abc}$$

Donc $\dfrac{2S}{abc} = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{a} = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{b} = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{c}$

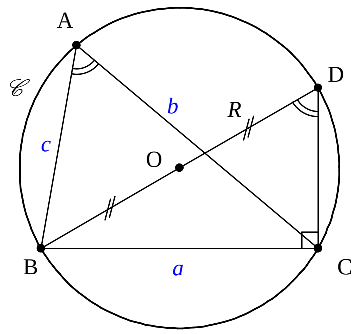
2°) Formule des sinus

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin\widehat{\mathrm{A}}} = \frac{b}{\sin\widehat{\mathrm{B}}} = \frac{c}{\sin\widehat{\mathrm{C}}} = \frac{abc}{2S}}$$

La formule exprime que les longueurs des côtés d'un triangle sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

3°) Lien avec le rayon du cercle circonscrit

ABC est un triangle quelconque.
$\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit à ABC.



On note O son centre et *R* son rayon.

On note également D le point diamétralement opposé à B sur $\mathscr{C}$.

On suppose que $\widehat{A}$ est aigu.

Le triangle BCD est rectangle en C.

$$\sin \widehat{BDC} = \frac{BC}{BD}$$

$$= \frac{a}{2R}$$

Donc $2R \sin \widehat{BDC} = a$ (1)

Or $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont deux angles inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$ qui interceptent le même arc.

Donc d'après le corollaire du théorème de l'angle inscrit, ils ont la même mesure c'est-à-dire $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

(1) s'écrit alors : $2R \sin \widehat{A} = a$.

Finalement :

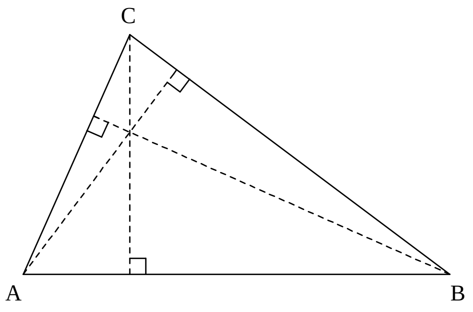
$$\boxed{\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R}$$

4°) Utilisation

La formule des sinus trouve une application en triangulation, procédé qui consiste à calculer des distances entre deux lieux à l'aide d'une longueur et de deux angles.

5°) Relation métrique sur les hauteurs dans un triangle quelconque

Soit ABC un triangle quelconque.



On reprend les notations précédentes avec les lettres a, b, c.
On note les longueurs des hauteurs issues respectivement de A, B, C.

On a : $a \times h_A = b \times h_B = c \times h_C$.

En effet, on peut calculer l'aire de ABC en prenant pour base chacun des trois côtés du triangle.

On obtient $\mathscr{A}_{ABC} = \frac{a \times h_A}{2} = \frac{b \times h_B}{2} = \frac{c \times h_C}{2}$ qui donne immédiatement le résultat.

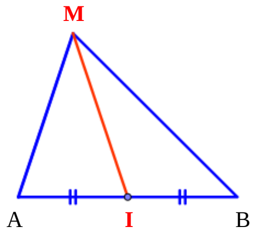
Avec la formule $a \times h_A = b \times h_B = c \times h_C$, on retrouve aisément la formule des sinus.

IV. Formule de la médiane

1°) Formule de la médiane

A et B sont deux points quelconques du plan P.
I est le milieu de $[AB]$.

$\forall M \in P \quad \mathbf{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$



Voir rappel sur la notion de médiane en appendice.

2°) Démonstration

Dans les trois premières lignes qui suivent, on n'utilise pas le fait que I est le milieu de [AB].

$$\forall \mathrm{M} \in P \quad \mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = \overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MB}}^2$$

$$= \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)^2 + \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)^2$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{MI}}^2 + 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right) + \overrightarrow{\mathrm{IA}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MI}}^2 + 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right) + \overrightarrow{\mathrm{IB}}^2$$

$$= 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{IA}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{IB}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \bullet \underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)}_{\vec{0}}$$

$$= 2\mathrm{MI}^2 + \mathrm{IA}^2 + \mathrm{IB}^2$$

$$= 2\mathrm{MI}^2 + 2\mathrm{IA}^2 \quad \text{(car I est le milieu de [AB] donc } \mathrm{IA} = \mathrm{IB}\text{)}$$

$$= 2\mathrm{MI}^2 + 2 \times \left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2$$

$$= 2\mathrm{MI}^2 + 2 \times \frac{\mathrm{AB}^2}{4}$$

$$= 2\mathrm{MI}^2 + \frac{\mathrm{AB}^2}{2}$$

Il s'agit d'un énoncé universel (phrase quantifiée avec « $\forall \mathrm{M} \in P$ ») ; on peut donc particulariser le point M selon les besoins du problème.

3°) Utilisation pratique

Comme le nom l'indique, la formule de la médiane permet de calculer la longueur des médianes d'un triangle connaissant les longueurs des côtés.

4°) Deux autres formules à savoir (dites aussi parfois « formules de la médiane »)

Dans ces formules, on ne se réfère plus à un triangle. L'appellation de « formules de la médiane » pour celles-ci est abusive.

A et B sont deux points quelconques.
I est le milieu de [AB].

$$\forall \mathrm{M} \in P \quad \mathbf{MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{IM}}$$

Démonstration :

$$\forall \mathrm{M} \in P \quad \mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = \overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{MB}}^2$$

$$= \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \quad \text{(identité remarquable scalaire)}$$

$$= \left(2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right) \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)$$

$= \left(2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right) \bullet \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ [On utilise l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ rappelée en appendice et la relation de Chasles pour réduire la somme $\overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}}$)

$$= \left(-2\overrightarrow{\mathrm{IM}}\right) \bullet \left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

$$= 2\left(\overrightarrow{\mathrm{IM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

$$= 2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{IM}}\right)$$

A et B sont deux points quelconques.
I est le milieu de [AB].

$$\forall \mathrm{M} \in P \quad \mathbf{\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

Démonstration :

$$\forall \mathrm{M} \in P \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right) \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right) \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} - \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{MI}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{IA}}^2 \qquad \text{(identité remarquable scalaire} \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2\text{)}$$

$$= \mathrm{MI}^2 - \mathrm{IA}^2$$

$$= \mathrm{MI}^2 - \frac{\mathrm{AB}^2}{4}$$

V. Application à des lieux géométriques

On appelle « lieu » en géométrie un ensemble de points.

1°) Ensemble des points équidistants de deux points distincts

● Propriété :

Soit A et B deux points distincts.

L'ensemble des points M de *P* tels que $\text{MA} = \text{MB}$ est la médiatrice de $[\text{AB}]$.

● Démonstration :

Nous allons utiliser le produit scalaire pour retrouver ce résultat vu en 6^e^.

Soit *E* l'ensemble des points M de *P* tels que $\text{MA} = \text{MB}$.

On note I le milieu de $[\text{AB}]$.

Soit M un point quelconque de *P*.

$$\text{M} \in E \Leftrightarrow \text{MA} = \text{MB}$$

$$\Leftrightarrow \text{MA}^2 = \text{MB}^2$$

$$\Leftrightarrow \text{MA}^2 - \text{MB}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{IM}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{IM}} = 0$$

E est donc la droite passant par I orthogonale à (AB) c'est-à-dire la médiatrice de $[\text{AB}]$.

2°) Lieu d'orthogonalité

● Propriété :

Soit A et B deux points distincts.

L'ensemble des points M de *P* tels que $\overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} = 0$ est le cercle de diamètre $[\text{AB}]$.

● Démonstration :

Nous allons utiliser le produit scalaire pour retrouver ce résultat vu en 6^e^.

Soit *E* l'ensemble des points M de *P* tels que $\overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} = 0$.

On note I le milieu de $[\text{AB}]$.

Soit M un point quelconque de *P*.

$$\text{M} \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{MI}^2 - \frac{\text{AB}^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{MI}^2 = \frac{\text{AB}^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \text{MI} = \frac{\text{AB}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{IM} = \frac{\text{AB}}{2}$$

E est donc le cercle de centre I et de rayon $\frac{\text{AB}}{2}$ c'est-à-dire le cercle de diamètre $[\text{AB}]$.

3°) Exemple d'ensemble défini par une inégalité

Soit A et B deux points distincts.

On cherche l'ensemble *E* des points M de *P* tels que $\overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} < 0$.

On reprend la même démarche que dans le paragraphe précédent.

On note I le milieu de $[\text{AB}]$.

Soit M un point quelconque de *P*.

$$\text{M} \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{MI}^2 - \frac{\text{AB}^2}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{MI}^2 < \frac{\text{AB}^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \text{IM} < \frac{\text{AB}}{2}$$

E est donc le disque ouvert de centre I et de rayon $\dfrac{\text{AB}}{2}$ c'est-à-dire le disque ouvert de diamètre $[\text{AB}]$.

Pour aller plus loin :

• L'ensemble des points M de P tels que $\overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} \leqslant 0$ est le disque fermé de diamètre $[\text{AB}]$.

• L'ensemble des points M de P tels que $\overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} > 0$ est le complémentaire dans P du disque ouvert de diamètre $[\text{AB}]$.

VI. Exemples de problèmes d'optimisation géométriques

1°) Exemple 1

Soit A et B deux points distincts.
Pour quel(s) point(s) M du plan la quantité $\text{MA}+\text{MB}$ est-elle minimale ?

D'après l'inégalité triangulaire, $\forall \text{M} \in P \quad \text{MA}+\text{MB} \geqslant \text{AB}$.
De plus, il y a égalité si et seulement si $\text{M} \in [\text{AB}]$.

La quantité $\text{MA}+\text{MB}$ est minimale pour tout point M du segment $[\text{AB}]$. La valeur minimale est AB.

On peut généraliser le problème.
Étant donnés trois points A, B, C quelconques distincts du plan, pour quel(s) point(s) M du plan la quantité $\text{MA}+\text{MB}+\text{MC}$ est-elle minimale ?
La solution est beaucoup plus difficile à trouver que dans le cas de deux points. Lorsque A, B, C ne sont pas alignés et que tous les angles du triangle ABC ont une mesure inférieure ou égale à 120°, il s'agit du point de Toricelli du triangle ABC.

2°) Exemple 2

Soit A un point et D une droite.
Pour quel(s) point(s) M de D la distance AM est-elle minimale ?

Soit H le projeté orthogonal de A sur D.

On peut dire que $\forall \text{M} \in D \quad \text{AM} \geqslant \text{AH}$.
De plus, il y a égalité si et seulement si $\text{M} = \text{H}$.

Le point M de D pour lequel la distance AM est minimale est H.

3°) Exemple 3

Soit A et B deux points du plan.
Pour quel(s) point(s) M du plan la quantité MA^2+MB^2 est-elle minimale ?

On note I le milieu de $[\text{AB}]$.

D'après la formule de la médiane, $\forall \text{M} \in P \quad \text{MA}^2+\text{MB}^2 = 2\text{MI}^2 + \dfrac{\text{AB}^2}{2}$.

On en déduit que $\forall \text{M} \in P \quad \text{MA}^2+\text{MB}^2 \geqslant \dfrac{\text{AB}^2}{2}$.

De plus, il y a égalité si et seulement si $\text{MI}=0$ soit $\text{M}=\text{I}$.

Le point M du plan pour lequel la quantité MA^2+MB^2 est minimale est I. La valeur minimale est égale à $\dfrac{\text{AB}^2}{2}$.

On peut généraliser le problème.
Étant donnés trois points A, B, C quelconques, pour quel(s) points M du plan la quantité $\text{MA}^2+\text{MB}^2+\text{MC}^2$ est-elle minimale ?
La solution est donnée dans l'appendice sur le centre de gravité d'un triangle.

VII. Lignes de niveau

1°) Exemple

Soit A et B deux points du plan.
On chercher l'ensemble E_k des points M de P tels que $\text{MA}^2+\text{MB}^2 = k$ où k est un réel.

On peut écrire $E_k = \left\{\text{M} \in P \,/\, \text{MA}^2+\text{MB}^2 = k\right\}$.

On note I le milieu de $[\text{AB}]$.

D'après la formule de la médiane, $\forall \text{M} \in P \quad \text{MA}^2+\text{MB}^2 = 2\text{MI}^2 + \dfrac{\text{AB}^2}{2}$.

$$\begin{aligned}
\text{M} \in E_k &\Leftrightarrow \text{MA}^2+\text{MB}^2 = k \\
&\Leftrightarrow 2\text{MI}^2 + \frac{\text{AB}^2}{2} = k \\
&\Leftrightarrow \text{MI}^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{\text{AB}^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

On ne connaît pas le signe de $k - \dfrac{\text{AB}^2}{2}$; il faut faire une **discussion**.

1^er^ cas : $\boxed{k > \dfrac{\text{AB}^2}{2}}$

$$\text{M} \in E_k \Leftrightarrow \text{MI} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(k - \frac{\text{AB}^2}{2}\right)}$$

$$E_k \text{ est le cercle } \left|\begin{array}{l} \text{de centre I} \\ \text{de rayon } R = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(k - \dfrac{\text{AB}^2}{2}\right)} \end{array}\right.$$

2^e^ cas : $\boxed{k = \dfrac{AB^2}{2}}$

$$\begin{aligned} M \in E_k &\Leftrightarrow MI = 0 \\ &\Leftrightarrow M = I \end{aligned}$$

$E_k = \{I\}$

3^e^ cas : $\boxed{k < \dfrac{AB^2}{2}}$

$$M \in E_k \Leftrightarrow \underbrace{MI^2}_{\geqslant 0} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right)}_{<0}$$

impossible

$E_k = \varnothing$

2°) Vocabulaire

f est une application de P dans $\mathbb{R}$.
k est un réel.
On appelle **ligne de niveau *k*** de f l'ensemble $E_k = \{M \in P \,/\, f(M) = k\}$.

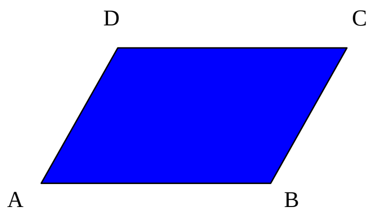
Dans l'exemple du **1°)**, on considère l'application

$$\begin{aligned} &\quad f \\ P &\to \mathbb{R} \\ M &\mapsto MA^2 + MB^2 \end{aligned}$$

Pour tout réel *k*, la ligne **surface de niveau *k*** de f est l'ensemble $E_k = \{M \in P \,/\, MA^2 + MB^2 = k\}$.

Complément : formule à connaître pour l'aire d'un parallélogramme

Dans la même veine que l'aire d'un triangle quelconque, il est intéressant de donner une formule pour l'aire d'un parallélogramme.



$$\boxed{\mathscr{A}_{ABCD} = AB \times AD \times \sin\widehat{BAD}}$$

Démonstrations :

Elles sont de deux types (elles reviennent en fait au même) :

1) On dit qu'un parallélogramme est constitué de deux triangles symétriques par rapport au centre du parallélogramme.
Ces deux triangles sont donc isométriques et par conséquent, ont la même aire.
On applique la formule donnant l'aire d'un triangle.
On multiplie le résultat par 2 et l'on obtient la formule donnée.

2) On refait la démonstration pour l'aire d'un triangle.
On note H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB).
Etc.

Autre formulation de la propriété à retenir :

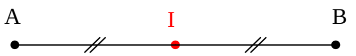
L'aire d'un parallélogramme est égale à longueur $\times$ largeur $\times$ sinus de l'un des angles.

Appendices

① Rappels sur milieu d'un segment et vecteurs

1°) Propriété (caractérisations vectorielles du milieu d'un segment)

Le milieu du segment $[AB]$ est l'unique point I tel que $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.



Une autre formulation consiste à dire que l'égalité $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ caractérise le milieu I de $[AB]$.

Attention, on ne parle pas du milieu d'un vecteur ! On ne dit pas que I est le milieu du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

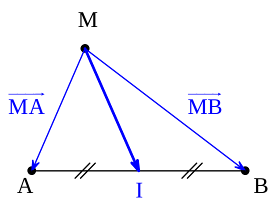
2°) Propriété (réduction d'une somme)

● **Énoncé**

A et B sont deux points quelconques du plan.
I est le milieu de $[AB]$.

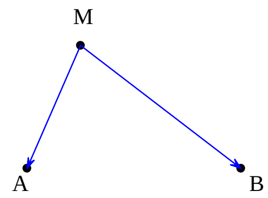
$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

● **Figure**

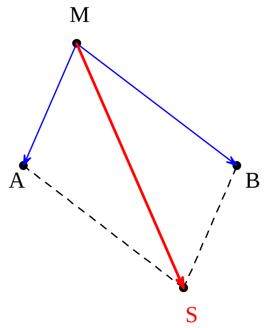


Les figures suivantes fournissent une explication de la relation et permettent de la mémoriser facilement (image mentale).

Mise en garde : Il s'agit bien d'une égalité de vecteurs et non de longueurs : formule de réduction de la somme vectorielle $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.
Il n'y a pas de formule analogue pour réduire la somme $MA+MB$. En particulier, l'égalité $MA+MB=2MI$ est fausse.



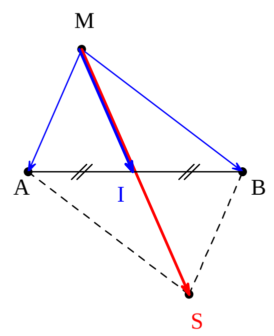
On note S le point tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MS}$.
On sait que S est le point tel que le quadrilatère AMBS soit un parallélogramme.



On peut donc dire que les segments $[AB]$ et $[MS]$ se coupent en leur milieu.

Donc le milieu I de $[AB]$ est aussi le milieu de $[MS]$.

On peut donc dire que $\overrightarrow{MS}=2\overrightarrow{MI}$.



● **Démonstration**

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$ (relation de Chasles ; on introduit le point I)

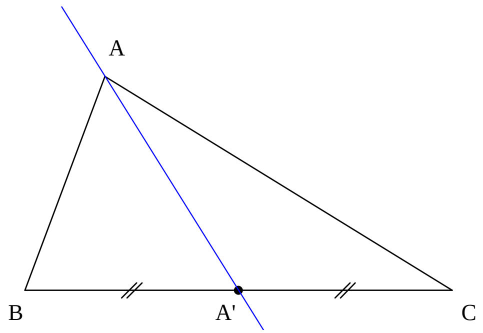
$=2\overrightarrow{MI}+\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}$ (car I est le milieu de $[AB]$)

$=2\overrightarrow{MI}$

② Médianes d'un triangle

Définition [médiane] :

> Dans un triangle, la médiane issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et le milieu du côté opposé.



Il ne faut pas confondre médiane et médiatrice (droite perpendiculaire à un côté en son milieu).

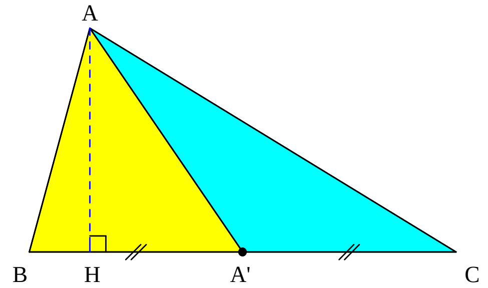
Comme les hauteurs, les médiatrices, les bissectrices, les médianes sont appelées droites remarquables d'un triangle.

Propriété [partage d'un triangle en deux triangles de même aire par une médiane] :

> Chaque médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles.

Il s'agit d'une petite propriété intéressante à connaître.

La démonstration et très facile.
On note A' le milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



La droite (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
C'est aussi la hauteur issue de A dans chacun des triangles ABA' et ACA'.

On a $\mathscr{A}_{ABA'}=\dfrac{AH\times BA'}{2}$ et $\mathscr{A}_{ACA'}=\dfrac{AH\times A'C}{2}$

Or A' est le milieu de $[BC]$ donc $BA'=A'C$.

On en déduit que $\mathscr{A}_{ABA'}=\mathscr{A}_{ACA'}$.

3°) Centre de gravité

On saut que le milieu I d'un segment $[AB]$ est défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
On dit que le point I est l'isobarycentre des points A et B.
En physique, il s'agit de la position d'équilibre si l'on suspend deux masses égales aux extrémités d'une barre.
Cela correspond d'ailleurs à l'étymologie du mot isobarycentre (iso : même et bary : lourd).

On va généraliser la définition à plusieurs points.

Définition :

> On appelle isobarycentre de trois points A, B, C l'unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Lorsque A, B, C ne sont pas alignés, on dit que G est le centre de gravité du triangle ABC.

Il s'agit d'une notion physique.
Cette définition est généralisable à un nombre de points

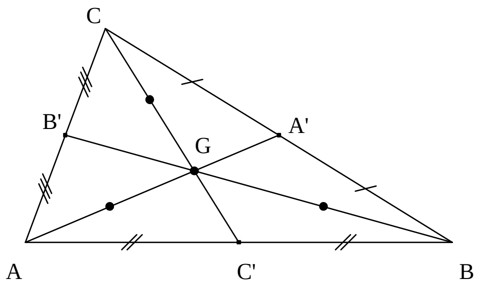
Propriété [réduction de la somme vectorielle $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$]

> $\forall M\in P\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

Démonstration : On utilise la relation de Chasles.

Propriété :

• Les médianes d'un triangle sont concourantes.
• Leur point d'intersection est le centre de gravité.
• Le centre de gravité est situé aux deux tiers d'une médiane en partant du sommet dont elle est issue.



Démonstrations :

Soit A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

G est le centre de gravité de ABC donc $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (1).

En utilisant la relation de Chasles, (1) donne $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.
En réduisant le membre de gauche, on obtient $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ $(1')$.
On sait par hypothèse que A' est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$ (relation $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA'}$ de l'appendice ① valable pour tout point M du plan ; on prend ensuite $M=A'$).

$(1')$ donne donc $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$ d'où $2\overrightarrow{AA'}=-3\overrightarrow{GA}$ soit $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}$ ce qui donne finalement
$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ (i).
On obtient de la même manière $\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ (ii) et $\overrightarrow{CG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ (iii).

(i) permet d'affirmer que $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires. Par suite, les points A, A', G sont alignés et par conséquent $G\in(AA')$.

Grâce à (ii) et (iii), on a de même $G\in(BB')$ et $G\in(CC')$.

G appartient donc à chacune des médianes du triangle, elles sont donc concourantes et leur point d'intersection est le centre de gravité de ABC.

Les égalités (i), (ii) et (iii) donnent la position de G sur chaque médiane aux deux tiers de chaque sommet (le mot médiane est pris dans le sens de segment).

Transformation de la somme $MA^2+MB^2+MC^2$

$\forall M\in P$ $MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$

$$=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$=\overrightarrow{MG}^2+2\left(\overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{GA}\right)+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{MG}^2+2\left(\overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{GB}\right)+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{MG}^2+2\left(\overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{GC}^2$$

$$=3\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2+2\overrightarrow{MG}\bullet\underbrace{\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)}_{\vec{0}}$$

$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

Propriété :

Les trois médianes partage le triangle quelconque en six triangles de même aire.

Démonstration à chercher

Rappel sur les autres droites remarquables :

● Les médiatrices des côtés d'un triangle ABC sont concourantes en un point O qui est le centre d'un cercle passant par les trois sommets.
Ce cercle est appelé cercle circonscrit au triangle ; O est le centre du cercle circonscrit.

● Les hauteurs issues des trois sommets d'un triangle ABC sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle.

● Les bissectrices d'un triangle ABC sont concourantes en un point I qui est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle.
Ce cercle est appelé cercle inscrit au triangle ; I est le centre du cercle inscrit.

● Lorsque ABC n'est pas équilatéral, O, G, H sont alignés sur une même droite appelée droite d'Euler du triangle.
De plus, on a toujours $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

③ Relations métriques dans un triangle rectangle

Voir devoir donné en 1ère S pour le 4 mars 2014
On peut démontrer ces relations en utilisant le produit scalaire ou la trigonométrie ou les triangles semblables.