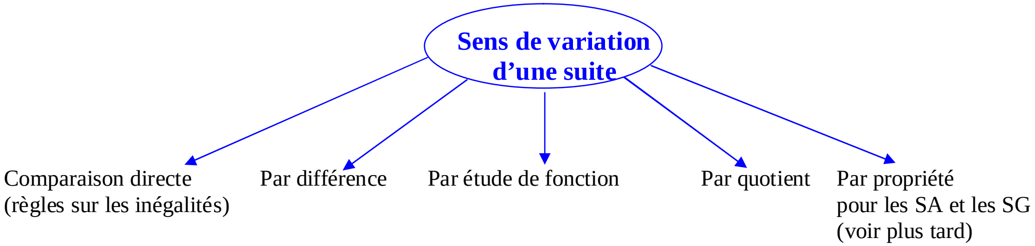
1$^{\text{ère}}$ S

Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

Objectif : étudier des méthodes d'étude de sens de variation de suites.



On adapte la méthode suivant l'expression de la suite.

I. Méthode par comparaison directe

1°) Méthode

Utilisation des règles sur l'ordre.

2°) Exemple

u est la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{n+5}$.
Étudier le sens de variation de u.

La suite est définie sur $\mathbb{N}$ donc le plus petit indice est 0.

$u_n = \sqrt{n+5}$ et $u_{n+1} = \sqrt{n+6}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n+5 < n+6$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{n+5} < \sqrt{n+6}$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$

Conclusion :

La suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0 (car on a écrit « $\forall\, n \in \mathbb{N}$ » avant l'inégalité $u_n < u_{n+1}$).

Remarque :

Pour conclure sur le sens de variation d'une suite, on est obligé de faire une phrase ; on ne fait pas de tableaux de variations pour les suites.

II. Méthode par différence

1°) Méthode

u est une suite.

- **On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$.**
- **On étudie son signe.**
  - Si $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite u est croissante.
  - Si $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite u est décroissante.

2°) Exemple

u est la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3n - 4$.
Étudier le sens de variation de u.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3n - 4$

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

On ne fait que du calcul littéral.
(Repasser en rouge les parenthèses que l'on doit rajouter pour le $n + 1$).

$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 4 - (3n-4) = 3n + 3 - 4 - 3n + 4 = 3$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$

Conclusion :

La suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

III. Méthode par étude de fonction

1°) Règle

$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \mapsto f(x)$

u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.

- Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite u est croissante à partir de l'indice 0.
- Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite u est décroissante à partir de l'indice 0.

Schéma :

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Suite fonctionnelle} & \longrightarrow & \textbf{Fonction associée } f \\ & & \downarrow \\ \textbf{Sens de variation de la suite} & \longleftarrow & \textbf{Sens de variation de } f \end{array}$$

Remarque : $\mathbb{R}^+$ est le plus petit intervalle contenant $\mathbb{N}$.

2°) Démonstration

2 cas	
f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.	f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \leqslant n+1$ $f(n) \leqslant f(n+1)$ $u_n \leqslant u_{n+1}$ La suite u est croissante à partir de l'indice 0.	$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \leqslant n+1$ $f(n) \geqslant f(n+1)$ $u_n \geqslant u_{n+1}$ La suite u est décroissante à partir de l'indice 0.

3°) Exemple

u est la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 - 4n + 1$.
Étudier le sens de variation de u.

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)$.

Calculons la dérivée de f.

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x - 4$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

$f(2) = -3$

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

Conclusion :

La suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 2.

IV. Méthode par quotient

1°) Règle

u est une suite telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.

- Si $\forall n \in \mathbb{N} \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite u est croissante à partir de l'indice 0.
- Si $\forall n \in \mathbb{N} \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite u est décroissante à partir de l'indice 0.

2°) Démonstration

2 cas	
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ $\downarrow \times u_n \quad (u_n > 0)$ $u_{n+1} \geqslant u_n$	$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ $\downarrow \times u_n \quad (u_n > 0)$ $u_{n+1} \leqslant u_n$

3°) Exemple

u est la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n$.
Étudier le sens de variation de u.

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1}$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = \dfrac{2 \times 3 \times 3^n}{2 \times 3^n} = 3$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$

Conclusion :

La suite u est croissante à partir de l'indice 0.

V. Fourre-tout de remarques

1°) Bilan des méthodes

• **Méthode générale : par différence**

• **Méthodes particulières :**
- **étude de fonctions (expressions assez compliquées).**
- **quotient (termes positifs ; expressions avec des puissances).**

Parfois, pour comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1, il est plus facile de calculer directement $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

On veillera à la condition restrictive d'utilisation de la méthode par quotient (signe strictement positif de tous les termes).

2°) Remarques sur la monotonie

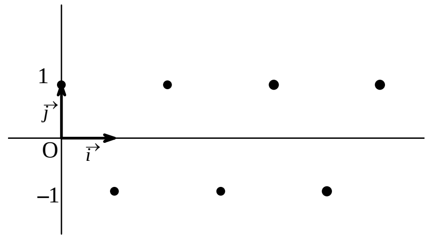
• Une suite peut être monotone à partir d'un certain indice (voir exercices).

• Une suite peut être non monotone.

Exemple :

u est la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n$.

$u_0 = 1$
$u_1 = -1$
$u_2 = 1$
$u_3 = -1$



3°) Bêtises à ne pas faire

• Pas de dérivées de suites.

• Pas de tableaux de variations de suites.

• Ne pas dire « (u_n) croissante sur $\mathbb{N}$ » mais « (u_n) croissante à partir de l'indice 0 ».

• $\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Le sens de variation de f **ne donne pas** celui de (u_n).

Au terme du chapitre, il est important de rappeler que **l'on adapte la méthode suivant l'expression de la suite**.

Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

	Principe	Commentaires
Méthode par comparaison directe	On compare u_n et u_{n+1} en utilisant les théorèmes de rangement.	Utilisation assez limitée ; pour les suites définies par une formule explicite simple.
Méthode par différence	On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.	
Méthode par quotient	Lorsque tous les termes sont **strictement positifs**, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors u est croissante. Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors u est décroissante.	Il faut d'abord vérifier que tous les termes sont de signe positif.
Méthode par étude de fonction	Lorsque $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, on peut étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire celui de u.	- Il faut connaître la fonction (fonction associée à la suite) - Pas pour les suites définies par récurrence - On peut étudier la dérivée pour étudier le sens de variation de f.
Méthode pour les suites arithmétiques et les suites géométriques	On peut utiliser les règles particulières qui sont données dans le paragraphe suivant (par rapport à la raison).	Voir le chapitre sur les suites arithmétiques et géométriques

Dans la différence $u_{n+1} - u_n$, il peut rester des n ou ne pas en rester.

Il ne faut pas oublier que $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geqslant 0$.

Par quotient, ça fait parfois des « méga-fractions » mais souvent il y a des simplifications (c'est d'ailleurs lorsqu'il y a des simplifications que cette méthode est intéressante ; c'est notamment le cas lorsqu'il y a des puissances).

Méthodes d'étude du sens de variation des suites

- **sans calculs : en utilisant une fonction**
- **avec calcul : il s'agit de calcul littéral**

Fiche sur les puissances

Définitions et propriétés	Exemples
a représente un réel quelconque et n un nombre entier supérieur ou égal à 1. a^n représente le produit de n facteurs égaux à a. $a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ a^{-n} représente l'inverse de a^n. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a^1 = a$ $a^0 = 1$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ $2^0 = 1$ $2^1 = 2$ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$
a et b représentent des réels quelconques m et n représentent des entiers relatifs. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \times n}$ $(ab)^n = a^n \times b^n$	$2^3 \times 2^5 = 2^8$ $2^4 \times 2^{-7} = 2^{-3}$ $\frac{3^9}{3^2} = 3^7$ $(5^3)^4 = 5^{12}$ $(5^{-2})^3 = 5^{-6}$ $(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$

Attention aux notations :

Lorsque l'on calcule la puissance d'une fraction, il faut absolument mettre des parenthèses autour de cette fraction.