1$^{\text{ère}}$ S

Lignes trigonométriques d'un nombre réel

Dans tout le chapitre, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.

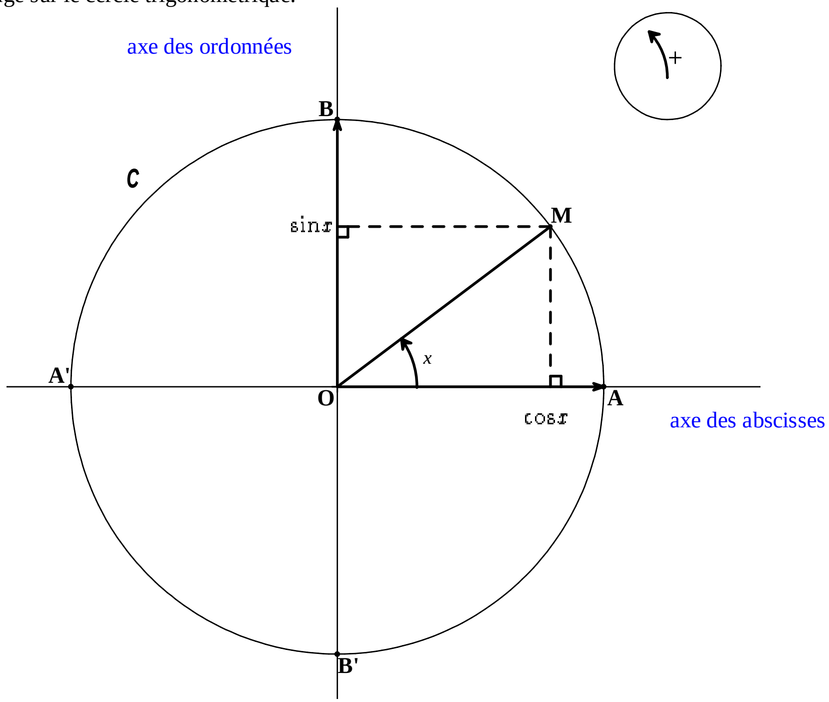
Dans les paragraphes I à IV, on notera avec des lettres majuscules X et Y les coordonnées dans le plan (pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté avec x qui sera utilisé pour les mesures d'angles en radians).
Ainsi les coordonnées d'un point M dans le plan seront notées X_M (pour l'abscisse) et Y_M (pour l'ordonnée).

Dans le paragraphe V, on reviendra aux notations « normales » avec des lettres minuscules car il n'y aura plus d'ambiguïté.

I. Cosinus et sinus d'un réel

1°) Définition

x est un réel quelconque.
M est son image sur le cercle trigonométrique.



On fait apparaître les projetés orthogonaux de M sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

• Le **cosinus de x** est l'abscisse de M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

• Le **sinus de x** est l'ordonnée de M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

Donc **M(cos x ; sin x)**.

Une remarque évidente à ce stade :

Le cosinus et le sinus varient en fonction du point, autrement dit varient en fonction du réel (utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique intéressante).

2°) Exemples

• L'image de $\frac{\pi}{2}$ est B(0 ; 1).

Donc $\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$.

• L'image de π est A'(– 1 ; 0).

Donc $\begin{cases} \cos \pi = -1 \\ \sin \pi = 0 \end{cases}$.

• L'image de $\frac{3\pi}{2}$ est B'(0 ; – 1).

Donc $\begin{cases} \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \end{cases}$.

• L'image de 0 est A(1 ; 0).

Donc $\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \sin 0 = 0 \end{cases}$.

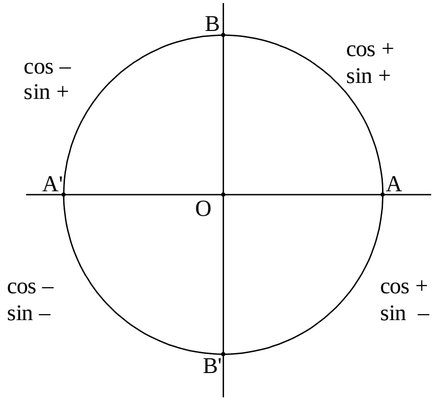
On peut aussi utiliser la calculatrice pour vérifier ces valeurs (mettre la calculatrice en mode radian).

On notera qu'en général on est obligé d'utiliser la calculatrice pour déterminer la valeur du cosinus ou du sinus d'un réel. On doit mettre préalablement la calculatrice en mode radian.

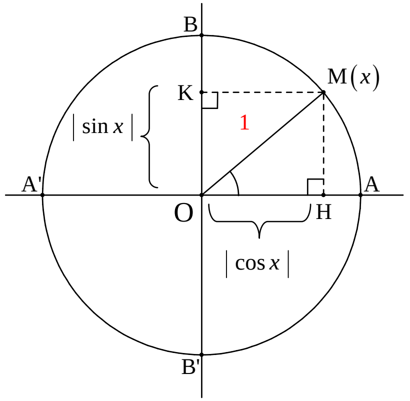
On notera également qu'il est désormais possible de considérer le cosinus d'un angle aigu ou non en degrés.
On pourra, par exemple, écrire $\cos 120°$ (nous verrons que la valeur est égale à $-\frac{1}{2}$).

3°) Encadrement et signe

$$\boxed{\begin{array}{c} -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \\ \\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \end{array}}$$



4°) Relation fondamentale



$\text{OH} = |\cos x|$

$\text{OK} = |\sin x|$

(Attention aux barres de valeur absolue indispensables ici).

H : projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses
K : projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées

OHM est un triangle rectangle en H.
Donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $\text{OH}^2 + \text{HM}^2 = 1$.

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Une meilleure démonstration consiste à utiliser la formule donnant la distance de deux points dans un repère orthonormé.

$\text{OM}^2 = (X_{\text{M}})^2 + (Y_{\text{M}})^2$ donc $\text{OM}^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$

Or M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 donc $\text{OM} = 1$.
Par suite, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

N.B. Conventions d'écriture :

$\cos^2 x = (\cos x)^2$
$\sin^2 x = (\sin x)^2$

Cette égalité est souvent utilisée sous la forme :

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

5°) Périodicité

x est un réel quelconque.
k un entier relatif quelconque.
x et $x + 2k\pi$ ont le même point associé sur le cercle trigonométrique.

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(x + 2k\pi) = \cos x \\ \sin(x + 2k\pi) = \sin x \end{array}}$$

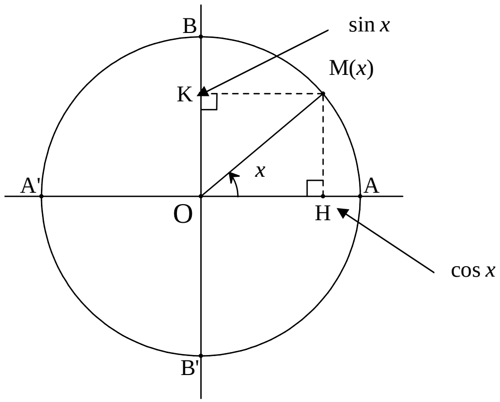
Exemple :

$$\cos\left(\frac{\pi}{9} + 2006\pi\right) = \cos\frac{\pi}{9}$$

6°) Lien avec le triangle rectangle

x est un réel quelconque compris dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

M est son image sur le cercle trigonométrique.



Comme $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $M \in \overset{\frown}{AB}$ et $\widehat{AOM} = x$ rad.

Dans le triangle OHM rectangle en H :

$$\cos x = \frac{ADJ}{HYP} = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH = X_M$$

définition 4^{e}

$$\sin x = \frac{OPP}{HYP} = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM = Y_M$$

définition 3^{e}

II. Tangente d'un réel

1°) Définition

> x est un réel quelconque tel que $\cos x \neq 0$.
>
> La **tangente de x** est définie par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$\tan\frac{\pi}{2}$ et $\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ n'existent pas.

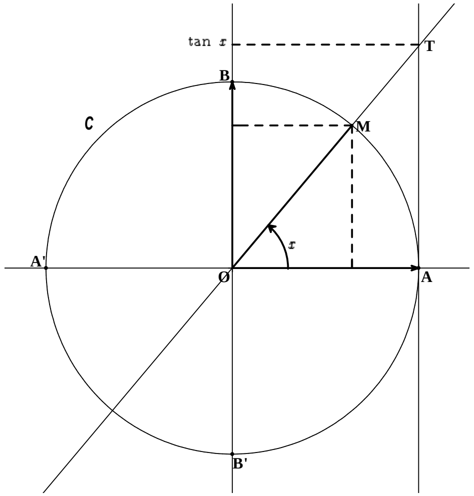
(**Hors programme :** $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

cotangente de x = inverse de la tangente)

2°) Lien avec le coefficient directeur d'une droite

x est un réel quelconque tel que $\cos x \neq 0$.

M est son image sur le cercle trigonométrique.



$M(\cos x\,;\sin x)$

Le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à :

$$m = \frac{Y_M - Y_O}{X_M - X_O} = \frac{\sin x - 0}{\cos x - 0} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\boxed{m = \tan x}$$

2°) Lecture graphique de la tangente

La droite (OM) coupe la droite d'équation $X = 1$ (tangente en A au cercle trigonométrique) en un point T.

L'équation réduite de la droite (OM) s'écrit $Y = mX$ soit $Y = (\tan x)X$.

Donc $Y_T = (\tan x)X_T$

$= (\tan x)\times 1$

$= \tan x$

3°) Relation liant la tangente et le cosinus

x est un réel quelconque tel que $\cos x \neq 0$.

On a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

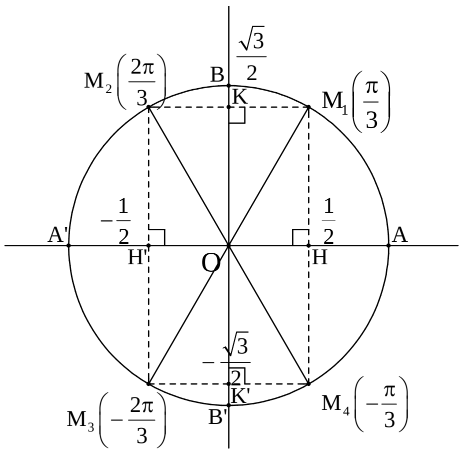
D'où : $\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

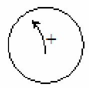
Soit $1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\boxed{1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

III. Valeurs remarquables

1°) Angle de $\frac{\pi}{3}$ et valeurs associées





• Angle de $\frac{\pi}{3}$

$[HM_1]$ est une hauteur du triangle équilatéral OAM_1.
Donc H est le milieu de [OA].

$OH = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{1}{2}$

[OK] est une hauteur du triangle équilatéral OM_1M_2.

$OK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$M_1\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Or M_1 est l'image de $\dfrac{\pi}{3}$.

Donc $\begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \\ \sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\tan \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sin \dfrac{\pi}{3}}{\cos \dfrac{\pi}{3}}$

$\tan \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}$

$\tan \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

• Angle de $\frac{2\pi}{3}$

$M_2\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D'où $\begin{cases} \cos \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

• Angle de $-\frac{\pi}{3}$

$M_4\left(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

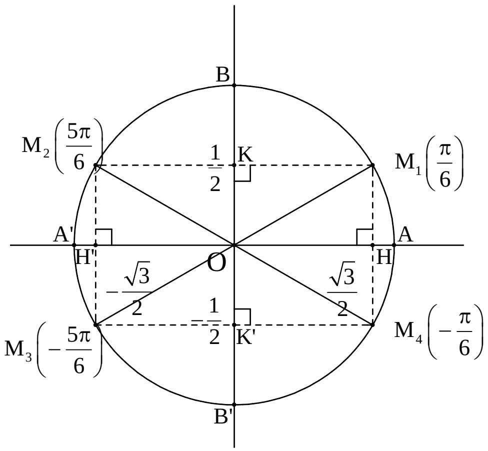
D'où $\begin{cases} \cos \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \\ \sin \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

• Angle de $-\dfrac{2\pi}{3}$

$M_3\left(-\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D'où $\begin{cases} \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

2°) Angle de $\dfrac{\pi}{6}$ et valeurs associées



• Angle de $\dfrac{\pi}{6}$

$M_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$

Donc $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

• Angle de $\dfrac{5\pi}{6}$

$M_2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$

D'où $\begin{cases} \cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

• Angle de $-\dfrac{\pi}{6}$

$M_4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$

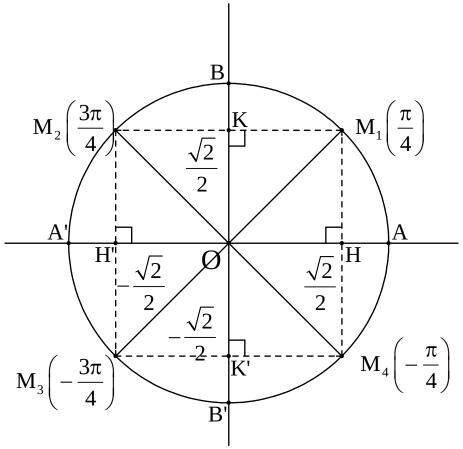
D'où $\begin{cases} \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

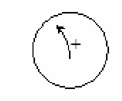
• Angle de $-\dfrac{5\pi}{6}$

$M_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$

D'où $\begin{cases} \cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

3°) Angle de $\frac{\pi}{4}$ et valeurs associées





• Angle de $\frac{\pi}{4}$

La quadrilatère OK M_1 H est un carré.

La diagonale $[OH_1]$ a pour longueur 1 donc son côté mesure $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}$$

$$=1$$

• Angle de $\frac{3\pi}{4}$

$M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D'où $\begin{cases}\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

• Angle de $-\frac{\pi}{4}$

$M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D'où $\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

• Angle de $-\frac{3\pi}{4}$

$M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D'où $\begin{cases}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

4°) Tableau récapitulatif

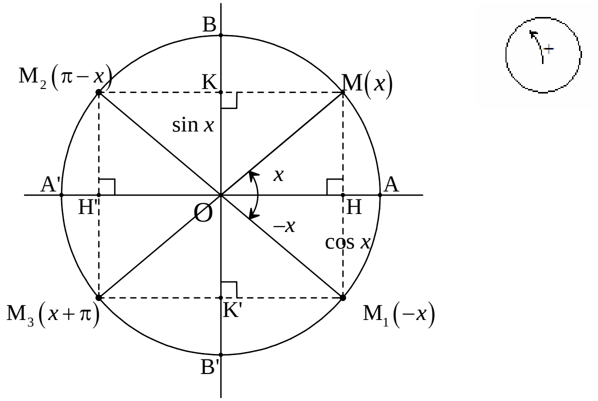
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Moyen mnémotechnique pour retenir la moitié du tableau avec 0, 1, 2, 3, 4.

IV. Angles associés

1°) Angles opposés

x est un réel quelconque.
M est son image sur le cercle trigonométrique.



$M(\cos x\,;\sin x)$

Or M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Donc $M_1(\cos x\,;-\sin x)$.

Or $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)=x$

Donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM_1}\right)=-x$.

On en déduit que M_1 est l'image de $-x$.

$\cos(-x)=\cos x$
$\sin(-x)=-\sin x$

2°) Angles supplémentaires (c'est-à-dire dont la somme est égale à π)

$M_2 = S_{(OB)}(M)$ (⚠ **aux notations des transformations)**

Donc $M_2(-\cos x\,;\sin x)$.

Or $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)=x$

Donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM_2}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM_1}\right)+\left(\overrightarrow{OM_1}\,;\overrightarrow{OM_2}\right)=\pi-x$.

On en déduit que M_2 est l'image de $\pi-x$.

$\cos(\pi-x)=-\cos x$
$\sin(\pi-x)=\sin x$

3°) Angles dont la différence est égale à π

$M_3 = S_O(M)$ (⚠ aux notations des transformations)

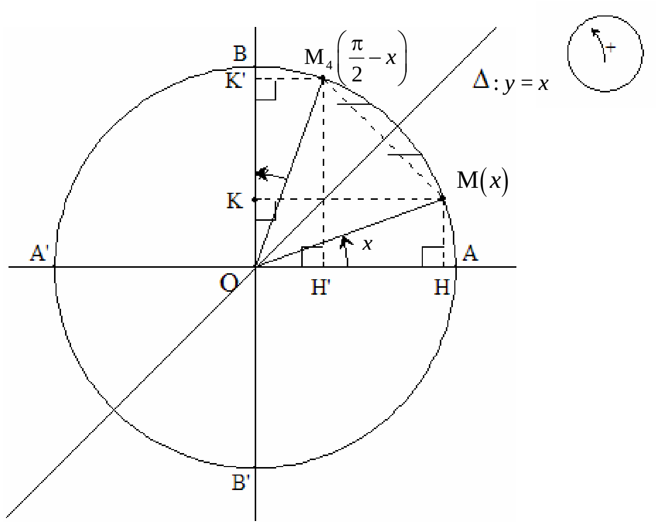
Donc $M_3(-\cos x\,;-\sin x)$.

Or $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM_3}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM_1}\right)+\left(\overrightarrow{OM_1}\,;\overrightarrow{OM_3}\right)=x+\pi$.

On en déduit que M_3 est l'image de $x+\pi$.

$\cos(\pi+x)=-\cos x$
$\sin(\pi+x)=-\sin x$

4°) Angles complémentaires (c'est-à-dire dont la somme est égale à $\frac{\pi}{2}$)



Δ est la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

$M_4 = S_\Delta(M)$

Abscisse de M_4 = ordonnée de M = sin x

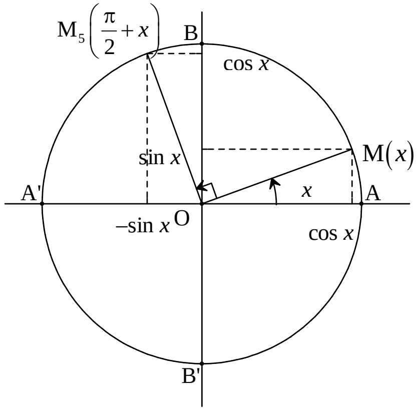
Ordonnée de M_4 = abscisse de M = cos x

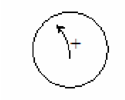
Donc M_4 (sin x ; cos x).

Or M_4 est l'image de $\frac{\pi}{2}-x$.

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\cos x\end{aligned}}$$

5°) Angles dont la différence est égale à $\frac{\pi}{2}$





$M_5 = R_{\left(O\,;\,\frac{\pi}{2}\right)}(M)$

Abscisse de M_5 = – ordonnée de M = – sin x

Ordonnée de M_5 = abscisse de M = cos x

Donc M_5 (– sin x ; cos x).

Or $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM_5}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM_3}\right)=x+\frac{\pi}{2}$

M_5 est l'image de $\frac{\pi}{2}+x$.

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=\cos x\end{aligned}}$$

6°) Récapitulatif

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(-x)&=\cos x\\ \sin(-x)&=-\sin x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi-x)&=-\cos x\\ \sin(\pi-x)&=\sin x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi+x)&=-\cos x\\ \sin(\pi+x)&=-\sin x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\cos x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=\cos x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathbf{\cos^2 x+\sin^2 x=1}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x+2k\pi)&=\cos x\\ \sin(x+2k\pi)&=\sin x\end{aligned}\qquad k\in\mathbb{Z}}$$

Toutes ces formules se retiennent avec les images mentales associées.

7°) Exemples d'utilisation des règles

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos(3\pi+x)&=\cos(2\pi+\pi+x)\\&=\cos(\pi+x)\\&=-\cos x\end{aligned}$$

entier impair × π → donne un – (valable pour le sinus et le cosinus)

$$\sin(-x-\pi)=\sin\left[-\underbrace{(x+\pi)}_{X}\right]$$

$$\boxed{=-\sin(x+\pi)}$$

$$=-(-\sin x)$$

$$=\sin x$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)&=\sin\left(\frac{4\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-x\right)\\&=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}-x\right)\\&=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)\\&=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\\&=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\\&=-\cos x\end{aligned}$$

Attention aux écritures :

$$\begin{aligned}\sin^2(-x)&=\left[\sin(-x)\right]^2\\&=(-\sin x)^2\\&=\sin^2 x\end{aligned}$$

V. Compléments sur les angles orientés

1°) Une nouvelle notation

Rappel :

Si θ est une mesure en radians d'un angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$, alors les mesures en radians de cet angle orienté sont tous les nombres de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On écrira : $(\vec{u}\,;\vec{v})=\theta+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$(\vec{u}\,;\vec{v})=\theta$ (modulo 2π)

(mod. 2π)

$(\vec{u}\,;\vec{v})=\theta$ (2π)

$(\vec{u}\,;\vec{v})=\theta\ \ [2\pi]$

On met un espace avant pour ne pas confondre avec un ×.

2°) Exemple d'utilisation

$(\vec{u}\,;\vec{v})=\dfrac{\pi}{3}\ \ [2\pi]$

3°) Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si	$(\vec{u}\,;\vec{v})=0\ \ [2\pi]$ ou $(\vec{u}\,;\vec{v})=\pi\ \ [2\pi]$

4°) Point-méthode : application au parallélisme et à l'alignement

A, B, C, D sont quatre points tels que A ≠ B et C ≠ D.

(AB) // (CD) si et seulement si	$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD})=0\ \ [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD})=\pi\ \ [2\pi]$

A, B et C sont trois points tels que A ≠ B et A ≠ C.

A, B et C sont alignés si et seulement si	$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})=0\ \ [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})=\pi\ \ [2\pi]$

5°) Attention : notation réservée aux angles orientés cette année

Exemple :

$$\frac{2001\pi}{4}=\frac{\pi+2000\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{4}+250\times 2\pi$$

$$\cancel{\frac{2001\pi}{4}=\frac{\pi}{4}}\ [2\pi]$$

VI. Appendice : calculs de longueurs

1°) Diagonale d'un carré

$\boxed{\textbf{La diagonale d'un carré de côté } a\ (a\in\mathbb{R}_+^*) \textbf{ mesure } a\sqrt{2}.}$

On notera que ce résultat reste également valable pour la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur *a*.

La démonstration de cette propriété est très facile avec le théorème de Pythagore.

Ce résultat est à savoir et à appliquer directement dans les exercices.

2°) Hauteur d'un triangle équilatéral

$\boxed{\textbf{La hauteur d'un triangle équilatéral de côté } a\ (a\in\mathbb{R}_+^*) \textbf{ mesure } \frac{a\sqrt{3}}{2}.}$

La démonstration de cette propriété est très facile avec le théorème de Pythagore.

Ce résultat est à savoir et à appliquer directement dans les exercices.