1ère S

Opérations sur les dérivées
Calculs de dérivées

Dans ce chapitre, on ne fait plus du tout référence au taux de variation.

Dans le chapitre précédent, on a vu la notion de « fonction dérivée » et l'on a notamment donné les fonctions dérivées de fonctions de « base ».
Ce chapitre fait suite au précédent.
Le but du cours est d'apprendre à calculer des dérivées de fonctions quelconques.

Il est important de signaler que les dérivées apparaissent de manière cachée sur les graphiques (le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente).
En général, on ne représente pas la courbe de la fonction dérivée (elle n'est pas intéressante pour sa représentation graphique).
Il est normal de ne pas bien voir encore l'utilité des dérivées.

I. Dérivée d'une somme

1°) Propriété

> *u* et *v* sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
>
> La fonction *u* + *v* est dérivable sur I
> et la dérivée est donnée par la formule $(u+v)'=u'+v'$.

(La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées).

2°) Exemples

• **Exemple 1**

$\boxed{f : x \mapsto x^2 + x}$

Calculer la dérivée de *f*.

Méthode :

On décompose.

On pose

$u(x)=x^2$
$v(x)=x$

(*u* et *v* sont deux fonctions de référence).

(On passe en « mode dérivée »)

$u'(x)=2x$
$v'(x)=1$

On écrit $f=u+v$.
On pose la formule $f'=u'+v'$.
On remplace avec les expressions précédentes.

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=2x+1}$

(le ′ indique que l'on fait la dérivée ; on dit que l'on a « dérivé » la fonction)

• **Exemple 2** $\boxed{f : x \mapsto x^3 + 1}$

On pose

$u(x)=x^3$
$v(x)=1$

$u'(x)=3x^2$
$v'(x)=0$

$f=u+v$
$f'=u'+v'$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=3x^2}$

3°) Remarque

La formule de dérivée d'une somme s'applique pour la somme de plus de deux termes.
La dérivée d'une somme avec un nombre quelconque de termes est égale à la somme des dérivées.

II. Dérivée du produit d'une fonction par un réel

1°) Propriété

> *u* est une fonction dérivable sur un intervalle I et *k* est un réel.
> La fonction *ku* est dérivable sur I
> et la dérivée est donnée par la formule $(ku)'=ku'$.

(Pour dériver, on garde la constante ; on dérive la fonction).

2°) Exemples

• **Exemple 1**

$\boxed{f : x \mapsto 5x^2}$

Calculer la dérivée de *f*.

Méthode :

On décompose (« on divise en deux »).

On pose

$u(x) = x^2$
$k = 5$

(u est une fonction de référence).
(On passe en « mode dérivée »)
$u'(x) = 2x$

On écrit $f = ku$.
On pose la formule $f' = ku'$.
On remplace avec les expressions précédentes (on multiplie).

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 10x}$

• **Exemple 2** $\boxed{f : x \mapsto \frac{x^3}{2}}$

Réécriture :

$f(x) = \frac{1}{2}x^3$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{2} \times 3x^2 = \frac{3x^2}{2}}$

• **Exemple 3** $\boxed{f : x \mapsto \frac{2}{x}}$

Réécriture :

$f(x) = 2 \times \frac{1}{x}$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}}$

III. Dérivée d'un produit

1°) Propriété

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La fonction uv est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

2°) Mise en garde

Attention, la formule est plus compliquée ; la dérivée d'un produit n'est pas égale au produit des dérivées.

« C'est comme les identités remarquables »

3°) Exemples

Voir exercices.
Utilisation de parenthèses. Calculs faisant intervenir des **« sous-dérivées »** (voir exercices).

IV. Dérivée de l'inverse d'une fonction

1°) Propriété

u est une fonction dérivable sur un intervalle I, qui ne s'annule pas sur I.
La fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

(attention, la formule est complexe)

2°) Exemple

Voir exercices.
Utilisation de parenthèses.

V. Dérivée d'un quotient

1°) Propriété

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que v ne s'annule pas sur I.
La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

(attention, la formule est complexe)

2°) Commentaires

Attention à bien mémoriser cette formule

Le – du haut ; l'ordre des facteurs ; pas de dérivée en bas.

Ça change vraiment quelque chose si l'on fait $uv' - u'v$ au lieu de $u'v - uv'$ à cause du signe – (alors que pour le produit, que l'on fasse $u'v+uv'$ ou $uv'+u'v$, ça ne change rien à cause du signe +).

3°) Exemple

Voir exercices. Calculs faisant intervenir des « sous-dérivées » (voir exercices).

VI. Dérivée d'une puissance d'exposant entier naturel

1°) Propriété (admise sans démonstration)

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et *n* est un entier naturel.
La fonction u^n est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$.

(attention, la formule est complexe)

2°) Cas particulier important : exposant 2

$\boxed{\left(u^2\right)'=2uu'}$

VII. Dérivée de l'inverse d'une puissance d'exposant entier naturel

1°) Propriété (admise sans démonstration)

u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I et *n* est un entier naturel.
La fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I
et la dérivée est donnée par la formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

(attention, la formule est complexe)

2°) Cas particulier important : exposant 1 (déjà vue)

$\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}}$

VIII. Tableau récapitulatif

u et *v* sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, *k* est un réel, *n* est un entier naturel.

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$k\times u$	$k\times u'$
$u\times v$	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}\ (u\neq 0)$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}\ (v\neq 0)$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u^n}$	$-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$

On combine ce tableau avec le tableau des dérivées des fonctions de référence.

IX. Dérivation des fonctions polynômes et rationnelles (conséquence des règles de dérivation)

1°) Propriété (dérivabilité des fonctions polynômes)

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2°) Propriété (dérivabilité des fonctions rationnelles)

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

3°) Remarque

Cette année, nous étudierons surtout des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles (ainsi que quelques fonctions trigonométriques).

X. Mise en pratique

1°) Reconnaître la (ou les) formule(s) à utiliser

On analyse la forme de l'expression (produit, quotient…).

2°) Principe des « sous-dérivées » (dérivée à l'intérieur d'une dérivée)

3°) Résultat attendu

Il est évidemment primordial de bien faire la distinction entre une fonction et sa dérivée.
La fonction que l'on dérive est la fonction « normale », ou fonction de « base » ou fonction « originale ».

XI. Rédaction et présentation définitives des calculs

1°) Exemple 1

$$\boxed{f(x)=2x^3-4x^2+10x-1}$$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme).

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2\times 3x^2-4\times 2x+10\times 1+0$

(On dérive chaque monôme)

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=6x^2-8x+10}$$

2°) Exemple 2

$$\boxed{f(x)=\frac{2x-1}{x+4}}$$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

Version au propre

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-4\}\quad f'(x)=\dfrac{2\times(x+4)-(2x-1)\times 1}{(x+4)^2}$

Utiliser des parenthèses (« parenthèses obligatoires » et « parenthèses d'isolation »)

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-4\}\quad f'(x)=\frac{9}{(x+4)^2}}$$

On ne développe pas le dénominateur.

Brouillon

On pose

$u(x)=2x-1$

$v(x)=x+4$

$u'(x)=2$

$v'(x)=1$

$f=\dfrac{u}{v}$

$f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\dfrac{2(x+4)-(2x-1)\times 1}{(x+4)^2}=\dfrac{9}{(x+4)^2}$

Retenir que, dans une version au propre, on n'écrit pas la formule de calcul pour la dérivée.

XII. Démonstrations des opérations algébriques

1°) Tableau

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
k est un réel.
$a\in \mathrm{I}$

	$f(x)=$	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=$	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
L_1	$u(x)+v(x)$	$=\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}+\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$	$(u+v)'(a)=u'(a)+v'(a)$
L_2	$k\times u(x)$	$k\times\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$	$k\times u'(a)$
L_3	$u(x)\times v(x)$	$\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h)+u(a)\times\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$	$u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$
L_4	$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\times\dfrac{1}{u(a+h)\times u(a)}$	$-\dfrac{u'(a)}{[u(a)]^2}$

2°) Justification de la 2^e colonne

• **Ligne L_1**

$f(x)=u(x)+v(x)$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}$$
$$=\frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}$$
$$=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

• **Ligne L_2**

$f(x)=k\times u(x)$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{k\times u(a+h)-k\times u(a)}{h}$$
$$=k\times\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

- **Ligne L_3**

$$f(x)=u(x)\times v(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}&=\frac{(u\times v)(a+h)-(u\times v)(a)}{h}\\&=\frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a+h)}{h}+\frac{u(a)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}\\&=\underbrace{\frac{u(a+h)-u(a)}{h}}\times v(a+h)+u(a)\times\underbrace{\frac{v(a+h)-v(a)}{h}}\end{aligned}$$

introduits de force

- **Ligne L_4**

$$f(x)=\frac{1}{u(x)}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}&=\frac{\frac{1}{u}(a+h)-\frac{1}{u}(a)}{h}\\&=\frac{\frac{1}{u(a+h)}-\frac{1}{u(a)}}{h}\\&=\frac{\frac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h}\\&=\frac{-\frac{u(a+h)-u(a)}{u(a+h)u(a)}}{h}\\&=-\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times\frac{1}{u(a+h)\times u(a)}\end{aligned}$$

3°) Justification de la 3^{e} colonne

On passe de la 2^{e} colonne à la 3^{e} colonne en faisant $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

H_1 : u est dérivable en a

H_2 : v est dérivable en a

H_1 : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$

H_2 : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$

On passe de la 2^{e} colonne à la 3^{e} colonne en prenant $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

- **Ligne L_1**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=u'(a)+v'(a)$$

- **Ligne L_2**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=k\times u'(a)$$

- **Ligne L_3**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$$

On admet intuitivement que $\lim\limits_{h\to 0}v(a+h)=v(a)$

4°) Autres formules

$$\begin{aligned}(u^2)'&=(u\times u)'\\&=u'\times u+u\times u' \quad \text{(on connaît la dérivée d'un produit)}\\&=2uu'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(u^3)'&=(u^2\times u)'\\&=(u^2)'\times u+u^2\times u'\\&=2uu'\times u+u^2\times u'\\&=3u'u^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)'&=\left(u\times\frac{1}{v}\right)' \quad \text{(astuce : réécriture)}\\&=u'\times\frac{1}{v}+u\times\left(\frac{1}{v}\right)' \quad \text{(on connaît la dérivée d'un produit et d'un inverse)}\\&=u'\times\frac{1}{v}+u\times\left(-\frac{v'}{v^2}\right)\\&=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}\end{aligned}$$

XIII. Utilisation d'outils de calcul formel

Lorsque les calculs sont trop techniques ou lorsque l'on veut vérifier le résultat d'une dérivée qui a été effectué à la main, on peut utiliser un logiciel de calcul formel ou une calculatrice qui fait du calcul formel.
On utilise la commande intégrée pour dériver une fonction.

Le résultat fourni n'est malheureusement pas toujours exploitable directement.
Ce qui nous intéresse la plupart du temps pour une dérivée c'est d'avoir une forme factorisée (lorsque c'est possible) afin d'étudier plus commodément son signe.
Pour cela, il faut parfois utiliser une autre commande pour factoriser la première expression de la dérivée.

XIV. Expression d'une dérivée : simplifications, transformations d'écritures

1°) Application des formules ; forme du résultat

On retiendra que les formules de dérivées donnent un résultat « brut » qu'il est possible d'arranger selon les besoins qu'on aura (en particulier, le besoin du signe que l'on aura dans le chapitre à venir).
Le résultat doit être donné sous une forme qui permet d'étudier facilement son signe.
Lorsque le signe n'apparaît pas clairement, on privilégiera les formes factorisées.

Dans ce chapitre, les formes attendues seront chaque fois précisées en exercice.

Exemple :

$f(x) = -2x^3 + 6x^2 + 1$

$f'(x) = -6x^2 + 12x$

On a le droit de remplacer $-6x^2 + 12x$ par $-6x(x-2)$, plus commode pour étudier le signe.

2°) Cas d'une somme

Dans ce chapitre, on arrangera l'expression au minimum.

Cas particulier : dérivée d'une fonction polynôme donnée sous forme développée : en appliquant les formules de dérivation, on obtient une expression sous forme développée.
Il est naturel de simplifier au minimum comme dans les exemples.
Dans ce chapitre, on n'ira pas plus loin.

3°) Cas d'un quotient

Exemple :

Le numérateur est développé (en appliquant les règles algébriques usuelles).
Le dénominateur en revanche n'est en général pas développé.

On retiendra un principe général : **on ne développe jamais le dénominateur d'une dérivée**.

Comme nous l'avons déjà dit, dans ce chapitre, les formes attendues seront chaque fois précisées en exercice.

Voir note plus bas 25-1-2012

4°) Stabilité des familles de fonctions

• **La dérivée d'une fonction polynôme est une fonction polynôme.**

Soit f une fonction polynôme.

Si $\deg f = n$ avec $n \geqslant 1$, alors $\deg f' = n - 1$.

• **La dérivée d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle.**

XV. Perspectives pour l'année prochaine

1°) Dérivées d'ordres supérieurs

Lorsque l'on a dérivé une fonction, on peut chercher à dériver de nouveau. C'est une question naturelle.
On obtient ainsi une nouvelle fonction appelée *dérivée seconde*. On peut de nouveau recommencer. On obtient la *dérivée troisième* et ainsi de suite…

Pour une fonction polynôme, on obtiendra 0 à partir d'un certain rang.
Ce n'est pas vrai en revanche pour des fonctions rationnelles. En général, on obtient des fonctions rationnelles de plus en plus compliquées.

Nous verrons en Terminale qu'il est possible de considérer la dérivée de la dérivée (« dérivée seconde ») et même de recommencer. Comme nous n'en aurons pas l'usage, nous ne le ferons pas cette année.
Nous verrons néanmoins cette année une application des dérivées première et seconde avec les notions de vitesse et d'accélération qui sera reprise dans le cours de physique de Terminale.

Note : La dérivée seconde n'apparaît pas sur un graphique.

2°) Primitives

Historique

dériver

« primitiver »

Cette année, on donne une fonction ; on cherche la dérivée.

L'année prochaine, on étudiera le problème inverse : on donnera une fonction et l'on cherchera les fonctions dont c'est la dérivée (chapitre sur les primitives). Nous aurons des formulaires qui permettent de déterminer rapidement des primitives.

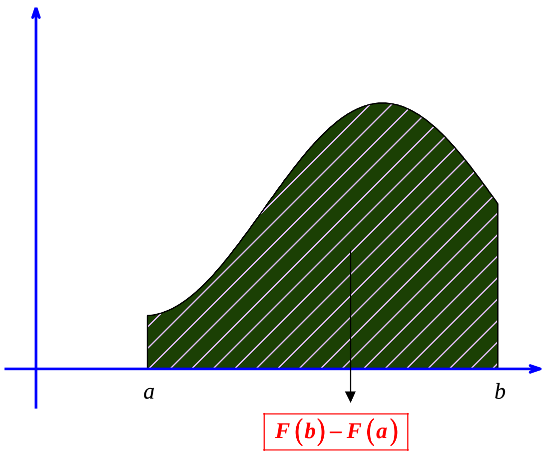
Historiquement, la notion de primitive est apparue très tôt, dès le XVII^{e} siècle, au moment où les mathématiciens ont inventé les dérivées. En effet, les mathématiciens de cette époque se sont rendus compte que les primitives pouvaient servir à résoudre des problèmes d'aires.

Nous allons expliquer brièvement le principe qui sera étudié en détail en Terminale – cela restera néanmoins un peu abstrait cette année.

On considère une fonction f définie, continue (le sens est ici à prendre dans un sens intuitif : « la courbe est tracée sans lever le crayon ») et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ (« positive » signifie « à valeurs positives ou nulles » c'est-à-dire $\forall x \in [a\,;b] \quad f(x) \geqslant 0$).

On démontre que f admet des primitives sur $[a\,;b]$ (c'est le résultat d'un théorème).

Si F est l'une quelconque de ces primitives, l'aire entre la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et l'axe des abscisses est égale à $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$. La recherche de primitive est reliée à la notion d'aire.



Lorsque la fonction f est négative, l'aire vaut $F(a)-F(b)$.

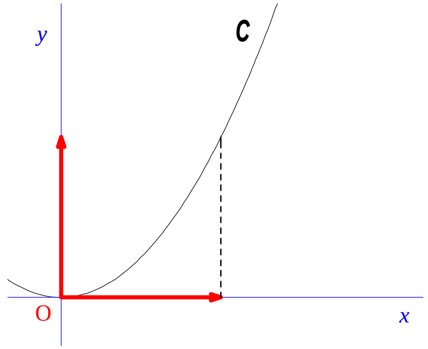
Ce type de problème est appelé un *problème de quadrature*.
Ces problèmes seront étudiés en Terminale dans le chapitre sur les *intégrales*.

Exemple : quadrature de la parabole

On prend la fonction « carré » $f : x \mapsto x^2$.

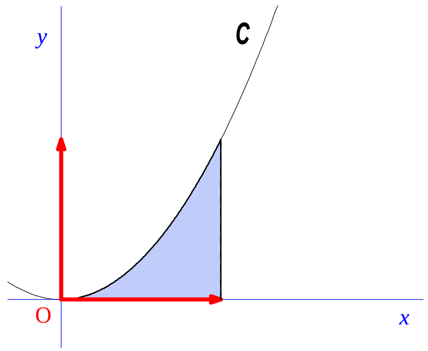
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On va chercher l'aire sous la courbe sur l'intervalle [0 ; 1].



Une primitive de f est la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$.

Comme la fonction f est positive sur l'intervalle [0 ; 1], l'aire sous la courbe est donnée par la formule $\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(0)=\dfrac{1^3}{3}-\dfrac{0^3}{3}=\dfrac{1}{3}$.



L'aire est donc égale à $\frac{1}{3}$ d'unité d'aire.

Bilan :

Cette année,

$$\text{fonction} \longrightarrow \text{dérivée}$$

On travaille avec la dérivée.