1ère S

Dérivées des fonctions de référence
Du nombre dérivé à la fonction dérivée

Objectifs :

● Poursuivre l'objet d'étude des deux chapitres précédents : la tangente à une courbe.

● Passer de la notion de nombre dérivé à la notion de fonction dérivée en s'appuyant sur les fonctions de référence (et enlever la difficulté au niveau de la notion d'un nombre dérivé).

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des fonctions particulières (fonctions de référence) qui vont nous permettre ensuite de travailler avec des fonctions plus générales. On va passer en revue un certain nombre de fonctions.

I. Dérivée d'une fonction constante $x \mapsto k$

1°) Définition

On appelle fonction constante une fonction qui prend toujours la même valeur.

Dans ce paragraphe, on considère une fonction constante $f : x \mapsto k$ **où k est un nombre fixé.**

2°) Aspect graphique (approche expérimentale)

La représentation graphique d'une fonction constante est une droite *D* parallèle à l'axe des abscisses.

Intuitivement, en tout point la tangente à la représentation graphique de *f* est confondue avec *D*.
Or le coefficient directeur de la droite *D* est nul donc on peut conjecturer que le coefficient directeur de la tangente en tout point est égal à 0.

3°) Propriété

Pour une fonction constante *f*, le nombre dérivé en tout réel *a* est égal à 0.
Pour tout réel *a*, on a : $f'(a) = 0$.

On peut donc bien définir une fonction *f '* associée à *f* qui donne le nombre dérivé en tout réel *a*.
On observe que le résultat ne dépend pas de *a*.

4°) Démonstration

$a \in \mathbb{R}$ fixé.

On considère un réel *h* non nul.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$$

Le résultat de cette limite est fini donc *f* est dérivable en *a* et $f'(a) = 0$.

II. Dérivée de la fonction $x \mapsto x$

1°) Aspect graphique (approche expérimentale)

$f : x \mapsto x$

La fonction *f* est une fonction linéaire de coefficient 1.
La représentation graphique de la fonction *f* est une droite *D* passant par l'origine du repère et de coefficient directeur 1.

Intuitivement, en tout point la tangente à la représentation graphique de *f* est confondue avec *D*.
Or le coefficient directeur de la droite *D* est égal à 1 donc on peut conjecturer que le coefficient directeur de la tangente en tout point est égal à 1.

2°) Propriété

Pour la fonction *f*, le nombre dérivé en tout réel *a* est égal à 1.
Pour tout réel *a*, on a : $f'(a) = 1$.

On observe que le résultat ne dépend pas de *a*.

3°) Démonstration

$a \in \mathbb{R}$ fixé.

On considère un réel *h* non nul.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)-a}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 1$$

Le résultat de cette limite est fini donc *f* est dérivable en *a* et $f'(a) = 1$.

III. Dérivée de la « fonction carré » ($x \mapsto x^2$)

1°) Aspect graphique (approche expérimentale)

$f : x \mapsto x^2$

La représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f est une parabole de sommet O (origine du repère).

À l'aide d'un LGD, on peut facilement conjecturer que la tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a a pour coefficient directeur $2a$.

On arrive facilement à établir un lien, une relation simple entre le coefficient directeur de la tangente et l'abscisse du point.

2°) Propriété

Pour la fonction *f*, le nombre dérivé en tout réel *a* est égal à 2*a*.
Pour tout réel *a*, on a : $f'(a) = 2a$.

3°) Démonstration

$a \in \mathbb{R}$ fixé.

On considère un réel h non nul.

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}\\ &= \frac{2ah+h^2}{h}\\ &= 2a+h\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$$

Le résultat de cette limite est fini donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

IV. Dérivée de la « fonction cube » $x \mapsto x^3$

1°) Aspect graphique (approche expérimentale)

$f : x \mapsto x^3$

À l'aide d'un LGD, on peut conjecturer que la tangente à la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f en un point d'abscisse a a pour coefficient directeur $3a^2$.

2°) Propriété

Pour la fonction *f*, le nombre dérivé en tout réel *a* est égal à 3*a*².
Pour tout réel *a*, on a : $f'(a) = 3a^2$.

3°) Démonstration

$a \in \mathbb{R}$ fixé.

On considère un réel h non nul.

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}\\ &= \frac{\left(a^3+3a^2h+3ah^2+h^3\right)-a^3}{h}\\ &= 3a^2+3ah+h^2\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 3a^2$$

Le résultat de cette limite est fini donc f est dérivable en a et $f'(a) = 3a^2$.

V. Dérivée de la fonction inverse

1°) Aspect graphique (approche expérimentale)

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$

La représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f est une hyperbole de centre O (origine du repère).

À l'aide d'un LGD, on peut conjecturer que la tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a (non nulle) a pour coefficient directeur $-\frac{1}{a^2}$.

2°) Propriété

Pour la fonction f, le nombre dérivé en tout réel $a \neq 0$ est égal à $-\dfrac{1}{a^2}$.

Pour tout réel $a \neq 0$, on a : $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

3°) Démonstration

$a \in \mathbb{R}^*$ fixé.

On considère un réel h non nul.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{-h}{a(a+h)}}{h}$$
$$= \frac{-\cancel{h}}{a(a+h)} \times \frac{1}{\cancel{h}}$$
$$= -\frac{1}{a(a+h)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{1}{a^2}$$

Le résultat de cette limite est fini donc f est dérivable en a et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

VI. Dérivée de la « fonction racine carrée »

1°) Aspect graphique

$f : x \mapsto \sqrt{x}$

La représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f est une demi-parabole de sommet O (origine du repère).

On va démontrer que la tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse $a > 0$ a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

2°) Propriété

Pour la fonction f, le nombre dérivé en tout réel $a > 0$ est égal à $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Pour tout réel $a > 0$, on a : $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

3°) Démonstration

- Étude en $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé

On considère un réel h non nul.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \quad \text{(quantité conjuguée du numérateur)}$$
$$= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

(On complique l'écriture mais cela simplifie le problème).

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Le résultat de cette limite est fini donc f est dérivable en a et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

- Cas où $a = 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Lorsque h prend des valeurs positives de plus en plus proches de 0, $\sqrt{h}$ prend des valeurs positives de plus en plus proches de 0. Par conséquent, $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs positives de plus en plus grandes.

Lorsque h tend vers 0 en restant strictement positif, $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$.

Pour la première fois, on va écrire une égalité dans laquelle vont intervenir des infinis.

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = +\infty$$

Le résultat de cette limite n'est pas un réel donc *f* n'est pas dérivable en 0.

Graphiquement, la courbe de la fonction « racine carrée » admet une demi-tangente (demi car *f* n'est pas définie à gauche de 0) ; cette demi-tangente est la demi-droite [O*y*).

● **Bilan :**

f est dérivable <u>en tout réel $a > 0$</u> et $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

On dit que la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction « racine carrée » est définie sur [0 ; + ∞[mais est dérivable sur]0 ; + ∞[.

La fonction « racine carrée » est définie en 0 ($f(0) = 0$) mais n'est pas dérivable en 0.

Le domaine de dérivabilité est plus petit que le domaine de définition.

(On dit parfois que la courbe de la fonction racine carrée « part » perpendiculairement à l'axe des abscisses, ou qu'elle part « verticalement).

L'étude des limites infinies sera vue plus tard.

VII. Dérivée de fonctions puissances d'exposant entier relatif

***n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.**

1°) $f : x \mapsto x^n$

Propriété (admise sans démonstration)

> **Pour la fonction *f*, le nombre dérivé en tout réel *a* est égal à na^{n-1}.**
> **Pour tout réel *a*, on a : $f'(a) = na^{n-1}$.**

2°) $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$

Propriété (admise sans démonstration)

> **Pour la fonction *f*, le nombre dérivé en tout réel *a* non nul est égal à $-\frac{n}{a^{n+1}}$.**
>
> **Pour tout réel $a \neq 0$, on a : $f'(a) = -\frac{n}{a^{n+1}}$.**

3°) Remarque

● Les résultats de ce paragraphe généralisent les résultats pour les fonctions « carré », « cube » et « inverse ».

Par exemple, pour *n* = 5.

$f(x) = x^5$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 5x^4$

● Il est intéressant de noter que la formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ est valable aussi bien pour *n* entier positif que pour *n* entier négatif.

Par exemple, pour *n* = – 2.

$f(x) = x^{-2}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -2x^{-3}$

On peut aussi écrire $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$.

VIII. Fonction dérivée

1°) Bilan des paragraphes précédents

Pour chacune des fonctions de référence, on a pu définir une fonction dérivée (avec une expression chaque fois différente). On est ainsi passé de la notion de nombre dérivé (local) à la notion de fonction dérivée (globale).

Plus généralement, nous apprendrons dans le chapitre suivant à calculer des dérivées pour des fonctions plus compliquées.

2°) Définition

> *f* est une fonction définie sur un intervalle I.
>
> ● On dit que *f* est **dérivable** $\boxed{\textbf{sur}}$ **I** lorsque *f* est **dérivable** en <u>tout</u> réel $a \in$ I.
>
> ● Dans ce cas, on définit une nouvelle fonction $f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$
> $x \mapsto f'(x)$ (nombre dérivé de *f* en *x*)
> appelée **« fonction dérivée »** de *f* (ou plus simplement **dérivée** de *f*).

3°) Applications

Fonction dérivée

Prendre la valeur en un réel x_0 — Étudier le signe

Nombre dérivé de *f* en x_0
Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0

Variations de la fonction *f*
(dans deux chapitres)

(voir exercices de ce chapitre)

Le 31-12-2012

Dans les ex. de ce chap., nous allons commencer à voir l'usage que l'on peut faire de la fonction dérivée dans le cas de fonctions de référence.

La fonction dérivée évite de faire les calculs de nombres dérivés comme nous l'avions fait dans le chapitre précédent (calculs longs et fastidieux en général).

Noté le 5-1-2012

Utilisation de la fonction dérivée

Pour calculer le nombre dérivé de *f* en a, on peut :

- utiliser la définition de base (calcul fastidieux ; on le fera désormais très peu)

- utiliser la fonction dérivée

Le nombre dérivé de *f* en *a* est l'image de *a* par *f'*, ce qui justifie la notation.

La définition de base va néanmoins servir à démontrer des propriétés théoriques.

Note le 7-12-2013

La notation $f'(a)$ prend alors un autre sens : image de a par la fonction f' - sens naturel que l'on ne pouvait donner tant qu'on n'avait pas défini de fonction f'.

Note le 8-12-2013

La notation $f'(a)$ prend alors tout son sens.

4°) Remarques

• Lorsque *f* est définie sur un domaine *D* qui est la réunion de plusieurs intervalles, on dit que *f* est dérivable <u>sur</u> *D* pour exprimer qu'elle est dérivable sur tous les intervalles qui constituent *D*.

• *f* est une fonction définie sur un intervalle I.
f peut ne pas être dérivable en certains réels.
Dans ce cas-là, l'ensemble de dérivabilité de *f* est plus petit que l'ensemble de définition de *f* (cas de la fonction « racine carrée » définie sur $[0\,;+\infty[$ mais dérivable sur $]0\,;+\infty[$).

5°) Application graphique

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Lorsque *f* est dérivable sur I, sa représentation graphique $\mathcal{C}$ admet en tout point d'abscisse $a \in$ I une tangente (non parallèle à l'axe des ordonnées).

Rappel :

Cette tangente a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

6°) Calcul de la dérivée d'une fonction

Le but du cours va être d'apprendre à calculer la dérivée d'une fonction quelconque.

Le 31-12-2012

Le but de la suite du cours est d'apprendre à calculer la dérivée d'une fonction quelconque.

IX. <u>Récapitulatif</u>

1°) Formulation en français

En langage parlé, on dira que :

« la dérivée d'une fonction constante est nulle »
« x en dérivée donne 1 »,
« x^2 en dérivée donne $2x$ »
« x^3 en dérivée donne $3x^2$ » etc.

2°) Tableau des dérivées (à savoir par cœur)

$f(x)=$	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	$f'(x)=$
k (k réel fixé)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$ $(n\in\mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$

Les colonnes du milieu sont importantes ; elles donnent pour chaque fonction l'ensemble de définition et de dérivabilité de chaque fonction.

Chacune de ces fonctions dérivées peut être obtenue grâce à un logiciel de calcul formel.

Appendice : une blague

x^2 et x sont sur un bateau. x tombe à l'eau. Que reste-t-il ?

$2x$

Pourquoi ?
Car le bateau a dérivé.