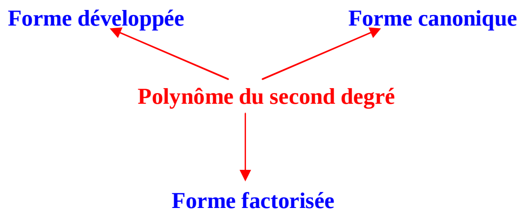
$1^{\text{ère}}$ S

Les polynômes du second degré



Polynôme du second degré

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

Forme développée réduite

↓

Forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$

↓

Racines

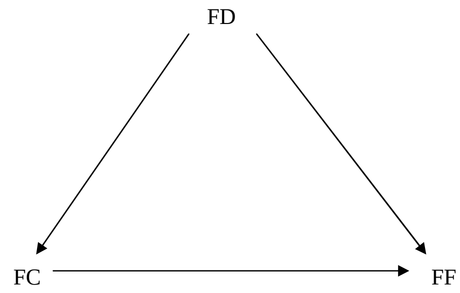
Une forme factorisée en facteurs du premier degré

↓

Signe

Il est important de disposer de plusieurs formes d'une expression qui ont chacune leur intérêt suivant le problème qu'on a à traiter.

On peut retenir le schéma suivant qui sera expliqué dans la suite du cours :



où FD désigne la forme développée, FC la forme canonique, FF la forme factorisée.

I. Généralités

1°) Définition

On appelle **fonction polynôme du second degré** une fonction *f* vérifiant les deux conditions :

C_1 : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

C_2 : il existe trois réels *a*, *b*, *c* avec $a \neq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$.

2°) Vocabulaire

- L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée **polynôme ou trinôme du second degré en *x***.

- Les réels *a*, *b*, *c* sont appelés **coefficients du polynôme** (*c* : **coefficient constant**).

- *x* est la **variable** du polynôme.

3°) Exemples

- $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

Coefficients : $a = 3$; $b = -5$; $c = 1$

- $f(x) = 4x^2 - 9x$

Coefficients : $a = 4$; $b = -9$; $\boxed{c = 0}$

- $f(x) = 4x^2 - 1$

Coefficients : $a = 4$; $\boxed{b = 0}$; $c = -1$.

(ces deux exemples : polynômes incomplets)

- $f(x) = (x + 3)(x - 1)$

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

Coefficients : $a = 1$; $b = 2$; $c = -3$

4°) N.B.

Dans la définition, on doit avoir $a \neq 0$ mais *b* ou *c* peuvent être égaux à 0.
Dans ce cas, on dira que le **polynôme est incomplet**.

5°) Contre-exemples

- $f(x) = 3x^2 + 5x + \dfrac{1}{x} \qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$

(*c* n'est pas constant)

- $f(x) = x^2 + 4|x| + 7 \qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ (pas de valeur absolue)

À partir du moment où il y a des inverses, des valeurs absolues ou des racines, la fonction n'est pas polynôme.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

1°) Démonstration (R.O.C) : passage FD $\longrightarrow$ FC

$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ $(a \neq 0)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\underbrace{\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)}_{\text{on travaille sur ce polynôme}}$$

1^ère^ étape : mettre *a* en facteur

$$\frac{\frac{b}{a}}{2} = \frac{b}{2a} \qquad \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \underbrace{- \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}}\right]$$

2^e^ étape : faire apparaître le carré d'une somme

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4a \times c}{4a \times a}\right]$$

3^e^ étape : réduire

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

2°) Définition du discriminant

On appelle **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ le nombre $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$.

3°) Règle (forme canonique)

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \boldsymbol{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}$$

Forme canonique : écriture dans laquelle la variable n'apparaît qu'une fois.

La formule n'est pas à retenir.
Pour mettre un trinôme du second degré avec des valeurs numériques, on refait la technique « artisanale » étudiée dans le chapitre précédent.

III. Racine d'un polynôme du second degré

1°) Définition

Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) sont appelées
- les **racines** de l'équation
- les **racines** du polynôme ax^2+bx+c

2°) Vocabulaire

Racine → Polynôme

Racine → Équation

Solution → Équation (uniquement)

3°) Exemples

Exemple 1 :

$\boxed{f(x)=x^2+3x-4}$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2+3\times1-4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc 1 est une racine (« évidente ») du polynôme $f(x)$.
(– 4 aussi)

Exemple 2 :

$\boxed{f(x)=x^2-9}$

Cherchons les racines de ce polynôme.
On résout l'équation $x^2-9=0$.
$x=3$ ou $x=-3$
Les racines de ce polynôme sont 3 et – 3.

Exemple 3 :

$\boxed{f(x)=x^2-4x}$

Cherchons les racines de ce polynôme.

On résout l'équation $x^2-4x=0$.
Cette équation est successivement équivalente à :
$x(x-4)=0$
$x=0$ ou $x-4=0$
$x=0$ ou $x=4$

Les racines de ce polynôme sont 0 et 4.

IV. Équations du second degré

1°) Méthode de résolution (admise sans démonstration)

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)

On cherche les racines de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

On doit résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

On s'intéresse à l'équation $f(x)=0$ c'est-à-dire $\boxed{ax^2+bx+c=0}$.
Ce qui nous intéresse est de résoudre cette équations dans le cas général (exemple : $3x^2+2x-5=0$).

L'équation $f(x)=0$ est équivalente à $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]=0$ soit $\boxed{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}=0}$ car $a \neq 0$ par hypothèse.

On discute suivant le signe de Δ.

1^er^ cas : $\boxed{\Delta > 0}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

Identité remarquable

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

$$\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$ (équation « produit nul »)

$x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ ou $x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0$

$x=-\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=-\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (se souvenir que les barres de fractions équivalent à des parenthèses)

2 solutions réelles

2ᵉ cas : $\boxed{\Delta = 0}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$
$$x=-\frac{b}{2a}$$

1 solution réelle

3ᵉ cas : $\boxed{\Delta < 0}$

$$\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{quantité}\geqslant 0} = \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{\text{quantité}<0}$$

impossible

pas de solution réelle

2°) Règle

$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$)

$\boxed{\Delta = b^2-4ac}$

1ᵉʳ cas : $\boxed{\Delta>0}$ L'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2ᵉ cas : $\boxed{\Delta=0}$ L'équation admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

3ᵉ cas : $\boxed{\Delta<0}$ L'équation n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

3 autres formulations équivalentes dans le 3ᵉ cas (ce qui fait 4 formulations équivalentes) :

Si $\boxed{\Delta<0}$,
- l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
- le polynôme ax^2+bx+c n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$
- pour tout $x\in\mathbb{R}$, ax^2+bx+c est non nul.

Les formules donnant les expressions des racines (qui sont assez compliquées) lorsque le discriminant est strictement positif doivent être sues par cœur.
On les appliquera directement sans refaire la démonstration.

Remarque sur le terme de « racine double » :

Lorsque $\Delta=0$, on parle de racine double même s'il n'y en a qu'une.
En effet, si l'on applique les formules du cas $\Delta>0$, en remplaçant Δ par 0, on obtient :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b-\sqrt{0}}{2a}=-\dfrac{b}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b+\sqrt{0}}{2a}=-\dfrac{b}{2a}$
Les deux racines sont confondues ($x_1=x_2$). On a la même racine en double.
Ce qui explique le nom de racine « double ».

Remarque sur le terme de « discriminant » :

On voit bien avec cette règle pourquoi on a donné à Δ le nom de *discriminant*.

2°) Exemples

• **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2-5x+1=0$ (1).**

Considérons le polynôme $3x^2-5x+1$.

Recensement des coefficients :
$a=3$; $b=-5$; $c=1$

Calcul du discriminant
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-5)^2-4\times3\times1$$
$$=13$$

On a $\Delta>0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$\boxed{S_1=\left\{\frac{5-\sqrt{13}}{6}\,;\,\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right\}}$$

• **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ (2).**

Considérons le polynôme $x^2 - 3x + 4$.

Recensement des coefficients :
$a = 1$; $b = -3$; $c = 4$

Calcul du discriminant
$\Delta = 9 - 16$
$= -7$

On a $\Delta < 0$ donc le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$\boxed{S = \varnothing}$

• **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5x^2 - 10x + 5 = 0$ (3).**

Considérons le polynôme $5x^2 - 10x + 5$.

Recensement des coefficients :
$a = 5$; $b = -10$; $c = 5$

Calcul du discriminant

$\Delta = 100 - 100$
$= 0$

On a $\Delta = 0$ donc le polynôme admet une racine double dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-10}{10} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$\boxed{S_3 = \{1\}}$

Autre méthode :

L'équation (3) est successivement équivalente à :

$5\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x-1)^2 = 0$
$x - 1 = 0$
$x = 1$

Nous avons vu une nouvelle technique de résolution d'équation (complètement nouvelle par rapport aux techniques étudiées précédemment). Il s'agit d'une résolution par « formules ». Cette technique ne s'applique qu'aux équations du second degré.

3°) Remarques (importantes)

• Le signe de Δ permet de donner le nombre de racines réelles (d'où le nom de « discriminant »).

• $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$; $\Delta = b^2 - 4ac$.
Lorsque a et c sont de signe contraire, alors $ac < 0$ d'où $-4ac > 0$ donc $\Delta > 0$.
Dans ce cas, l'équation admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

• On n'utilise pas les formules avec Δ quand on sait résoudre une équation du second degré directement, en particulier dans le cas d'équations incomplètes.

Exemples :

$x^2 - 2x + 1 = 0$ (1) $(x-1)^2 = 0$ $x - 1 = 0$ $x = 1$ $S_1 = \{1\}$	$x^2 - 1 = 0$ (2) $(x-1)(x+1) = 0$ $x - 1 = 0$ ou $x = -1$ $S_2 = \{-1 ; 1\}$	$x^2 - 6x = 0$ (3) $x(x-6) = 0$ $x = 0$ ou $x = 6$ $S_3 = \{0 ; 6\}$

Les formules avec Δ donneraient bien sûr les mêmes résultats mais il serait maladroit de les utiliser.

• Quand on obtient $\Delta = 0$, c'est qu'on est passé à côté d'une identité remarquable.

4°) Utilisation d'outils de calculs

• Sur calculatrice, utilisation d'un programme (cf. appendice) ou du solveur d'équations (calculatrice TI 83 Premium CE, calculatrices Casio, calculatrices faisant du calcul formel).
Attention, dans le cas d'un programme sur calculatrice, les solutions peuvent être données sous forme de valeurs approchées et non en valeurs exactes.
Les calculatrices possédant un « bon » solveur d'équations donnent les solutions en valeurs exactes à l'aide de radicaux.

• Sur logiciel de calcul formel, on rentre l'équation (on doit se mettre préalablement en mode complexe).

Le logiciel fournit les valeurs exactes des solutions à l'aide de radicaux.
À noter que les logiciels de calcul formel peuvent résoudre des équations du second degré à coefficients complexes.

Le 13-10-2015

Certaines calculatrices « simples » (calculatrices Casio et calculatrice TI 83 CE Premium) peuvent résoudre les équations du second degré en donnant les solutions sous forme exacte c'est-à-dire donnent les solutions à l'aide de racines.
Sinon, utiliser le programme donnant les racines en valeurs approchées.

Version initiale du 13-10-2015

Certaines calculatrices (calculatrices Casio et calculatrice TI 83 CE Premium) peuvent résoudre les équations du second degré en donnant les racines sous forme exacte c'est-à-dire donnent les solutions à l'aide de racines.
Sinon, utiliser le programme donnant les racines en approchée.

V. Discriminant réduit

1°) Définition

$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$

On suppose que b s'écrit « facilement » (voir encadré ci-dessous) sous la forme $b=2b'$ où b' est un réel.

• C'est le cas si b est un entier pair (exemple : pour $b=6$, on peut écrire $b=2\times 3$; on prend $b'=3$).

Si b est un entier impair, on n'appliquera pas la méthode exposée dans ce paragraphe, même si théoriquement ce serait possible (mais cela n'aurait pas d'intérêt du point de vue calculs).

• Il y a d'autres cas (exemple : pour $b=2\sqrt{3}$, on peut écrire $b=2\times\sqrt{3}$; on prend $b'=\sqrt{3}$).

L'équation s'écrit alors $ax^2+2b'x+c=0 \quad (a\neq 0)$.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &=(2b')^2-4ac\\ &=4(b')^2-4ac\\ &=4\left(b'^2-ac\right)\end{aligned}$$

On pose $\boxed{\Delta'=(b')^2-ac}$ **(discriminant réduit)**.

On a $\Delta=4\Delta'$.

2°) Différents cas possibles

1^er cas : $\boxed{\Delta'>0}$ équivalent à $\boxed{\Delta>0}$

L'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &=\frac{-2b'-\sqrt{4\Delta'}}{2a}\\ &=\frac{-2b'-2\sqrt{\Delta'}}{2a}\\ &=\frac{2\left(-b'-\sqrt{\Delta'}\right)}{2a}\\ &=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2&=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &=\frac{-2b'+\sqrt{4\Delta'}}{2a}\\ &=\frac{-2b'+2\sqrt{\Delta'}}{2a}\\ &=\frac{2\left(-b'+\sqrt{\Delta'}\right)}{2a}\\ &=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}\end{aligned}$$

2^e cas : $\boxed{\Delta'=0}$ équivalent à $\boxed{\Delta=0}$

L'équation admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x_0&=-\frac{b}{2a}\\ &=-\frac{2b'}{2a}\\ &=-\frac{b'}{a}\end{aligned}$$

3^e cas : $\boxed{\Delta'<0}$ équivalent à $\boxed{\Delta<0}$

L'équation n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

3°) Règle

$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

$b'=\dfrac{b}{2}$

$\boxed{\Delta'=b'^2-ac}$

1^er cas : $\boxed{\Delta'>0}$ L'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

2^e cas : $\boxed{\Delta'=0}$ L'équation admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\dfrac{b'}{a}$.

3^e cas : $\boxed{\Delta'<0}$ L'équation n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

4°) Utilisations

- $x^2+7x-6=0$

$$\left.\begin{array}{l}a=1\\b=7\\c=-6\end{array}\right\}\ b'=\frac{7}{2}$$ On n'utilise pas Δ'.

- $x^2+6x-7=0$

$$\left.\begin{array}{l}a=1\\b=6\\c=-7\end{array}\right\}\ b'=3$$ On utilise Δ'.

- $x^2+2\sqrt{3}x+4=0$

$$\left.\begin{array}{l}a=1\\b=2\sqrt{3}\\c=4\end{array}\right\}\ b'=\sqrt{3}$$ On utilise Δ'.

(N.B. : Si on utilise Δ, on obtient les mêmes solutions après simplification par 2 qu'avec Δ' !)

Quand utilise-t-on le discriminant réduit ?

On calcule $\frac{b}{2}$.
Si on trouve un trouve un nombre simple (il ne faut pas que ce soit une fraction par exemple), on utilise le discriminant réduit.
(Mais si on utilise le discriminant « normal », on trouve heureusement les mêmes solutions.)

Sinon, on utilise le discriminant « normal ».

Les formules avec le discriminant réduit permettent de gagner du temps.

On doit toujours privilégier le discriminant réduit lorsque le coefficient b est un nombre pair (exemple : $b=4$) ou s'écrit commodément comme produit de 2 par un réel (exemple : $b=2\sqrt{3}$).
Les formules donnent les solutions sous une forme déjà simplifiée.

5°) Remarques sur le discriminant réduit

On reprend les notations du chapitre.

- On peut noter que le discriminant réduit est donné par la formule $\Delta'=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$.

- On sait que $\Delta=4\Delta'$. Pour calculer Δ', il n'est cependant pas utile de calculer Δ. On calcule directement Δ'.

VI. Somme et produit des racines

1°) Règle

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$
On suppose que $\Delta\geqslant 0$.
Le polynôme $f(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 distinctes ou confondues dans $\mathbb{R}$.

On a : $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

On peut être frappées par la simplicité de ces formules en regard des formules des racines qui, elles, sont assez compliquées.

2°) Démonstration (ROC)

On pose : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On travaille en littéral :

$\underbrace{x_1+x_2}_{}$ calcul littéral

$\underbrace{x_1x_2}_{}$ calcul littéral

On a :

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\&=\frac{-2b}{2a}\\&=-\frac{b}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1x_2&=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}\\&=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}\\&=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}\\&=\frac{4ac}{4a^2}\\&=\frac{c}{a}\end{aligned}$$

3°) Application aux racines évidentes

● Idée fondamentale :

Si on connaît une racine d'un polynôme du second degré, on peut trouver l'autre par le produit ou la somme.

● Définition :

On appelle racine « évidente » d'un polynôme (de degré 2 ou de degré quelconque) une racine que l'on trouver « de tête ».
Il s'agit souvent des nombres 1, – 1, 2 ou – 2.

On peut remarquer que l'on ne parle pas de 0 comme racine évidente. En effet, on voit tout de suite que 0 est racine évidente d'un polynôme au fait qu'il est factorisable par *x*.

● Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+3x-4=0$ sans calculer Δ.

On remarque que 1 est une racine de l'équation (car $1^2+3\times1-4=0$).
L'équation admet donc une autre racine α dans $\mathbb{R}$ (distincte ou confondue).

On a : $1\times\alpha=\dfrac{-4}{1}$ (produit des racines $\dfrac{c}{a}$ avec $a=1$ et $c=-4$).
Ce qui donne immédiatement $\alpha=-4$.
Soit *S* l'ensemble des solutions de l'équation.

$\boxed{S=\{1\,;-4\}}$

Remarque : On pourrait aussi utiliser la formule sur la somme (mais on ne le fait pas en pratique).
On retiendra la rédaction-type :

« Les racines du polynôme x^2+3x-4 sont 1 (racine évidente) et – 4 (obtenue par produit ou obtenue par calcul) ».
On n'écrit pas le calcul qui permet de trouver – 4.

● Point-méthode :

On trouve les racines évidentes en remplaçant l'inconnue par l'un des nombres – 2, – 1, 1, 2 (calcul mental rapide).

L'une des deux racines évidente se trouve de tête.
L'autre racine se trouve par un calcul (mini-calcul).

Exemple 1 : Déterminons les racines du polynôme x^2+x-2.

$\rightarrow x_1=1$

$\rightarrow x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{2}{1}$

$1\times x_2=-2$

$x_2=-2$

Exemple 2 : Déterminons les racines du polynôme $3x^2+x-14$.

On teste des valeurs particulières de *x* [C'est une technique nouvelle].
On remplace *x* par 1 ; 2 ; – 1 ; – 2 (on teste jusqu'à tomber sur 0).
On trouve première racine 2 car $3\times2^2+2-14=0$.

$x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$ (on résout l'équation) « *Ça fait une équation* »

$2\times x_2=\dfrac{14}{3}$

$x_2=\dfrac{\frac{14}{3}}{2}=\dfrac{7}{3}$

On retiendra également la formule $(\text{racine évidente})\times(\text{l'autre racine})=\dfrac{c}{a}$ (donc $\text{l'autre racine}=\dfrac{c}{a\times\text{racine évidente}}$).

$(\text{racine évidente})\times x_2=\dfrac{c}{a}$ (donc $\text{l'autre racine}=\dfrac{c}{a\times x_2}$).

On a aussi $(\text{racine évidente})+(\text{l'autre racine})=-\dfrac{b}{a}$ mais on n'utilise pas cette égalité en pratique.

● Point-méthode sur les équations du second degré :

● équation incomplète ⟶ pas de Δ

● équation complète

⟶ on regarde s'il ne s'agit pas d'une identité remarquable

⟶ on regarde s'il n'y a pas une racine évidente

⟶ sinon Δ

4°) Retour sur une règle

$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$ et $c\neq 0$)

Lorsque a et c sont de signe contraire, l'équation admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ (car $\Delta>0$).

On peut dire que ces deux racines sont de signes contraires car leur produit est égal à $\dfrac{c}{a}$ donc est strictement négatif.

Nous verrons également que le produit et la somme des racines permettent d'en déduire des informations sur le signe de ces racines.

À quoi sert la somme et le produit des racines ?

- trouver le signe des racines (point à détailler)
- pour trouver l'autre racine quand on connaît déjà une racine (notamment dans les racines évidentes)
- calculer des expressions symétriques en les racines (voir exercices)

Mais ne sert pas à trouver les racines.

VII. Factorisation d'un polynôme du second degré

1°) Étude des différents cas possibles

$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

$\Delta=b^2-4ac$

On cherche à factoriser $f(x)$. On va partir de la forme canonique qui a été déterminée auparavant.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ **(Forme canonique)**

On va chercher à factoriser à partir de la forme canonique.

<u>1^er^ cas</u> : $\boxed{\Delta>0}$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\\&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]\end{aligned}$$

identité remarquable

$f(x)=a\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ (repasser en rouge la variable x qui apparaît cette fois à deux endroits)

On a posé : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ donc $-x_1=\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $-x_2=\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

D'où $\boxed{f(x)=\underline{\underline{a}}(x-x_1)(x-x_2)}$

On a déterminé <u>une</u> forme factorisée de $f(x)$ en facteurs du premier degré.

<u>2^e^ cas</u> : $\boxed{\Delta=0}$

$$\boxed{f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

<u>3^e^ cas</u> : $\boxed{\Delta<0}$

On reprend la forme canonique $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

L'expression $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}$ peut aussi s'écrire $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-\Delta}{4a^2}$.

Comme $\dfrac{-\Delta}{4a^2}>0$, l'expression $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est la somme d'un carré parfait et d'une quantité strictement positive. On ne peut donc pas la factoriser dans $\mathbb{R}$.

Le polynôme $f(x)$ ne peut s'écrire comme produit de facteurs du premier degré dans $\mathbb{R}$.

Nous avons vu une nouvelle technique de factorisation (complètement nouvelle par rapport aux techniques étudiées précédemment). Il s'agit d'une factorisation au sens des polynômes.
Il s'agit d'une factorisation par « formules ». Cela n'a jamais été fait sauf lorsque l'on a appliqué les identités remarquables pour factoriser des expressions.

2°) Règle

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

$\boxed{\Delta>0}$	$\boxed{\Delta=0}$	$\boxed{\Delta<0}$
2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2.	une racine double dans $\mathbb{R}$, $x_0=-\dfrac{b}{2a}$	aucune racine dans $\mathbb{R}$
$f(x)=\underline{\underline{a}}(x-x_1)(x-x_2)$	$f(x)=(x-x_0)^2$	Pas de factorisation en facteurs du premier degré.

3°) Exemple

$\boxed{f(x)=3x^2+2x-5}$

Donner une factorisation de $f(x)$ en facteurs du premier degré.

Recensement des coefficients :

$a=3$; $b=2$; $c=-5$

$\Delta=2^2-4\times3\times(-5)$
$=64$

On a $\Delta>0$ donc l'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2.

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{64}}{2\times3}$

$x_1=1$

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2=\dfrac{-2-\sqrt{64}}{2\times3}$

$x_2=-\dfrac{5}{3}$

N.-B. : On aurait aussi pu utiliser les racines évidentes (1 est racine évidente du polynôme).

$f(x)=3(x-x_1)(x-x_2)$

$\boxed{f(x)=3(x-1)\left(x+\dfrac{5}{3}\right)}$ (une forme factorisée en facteurs du premier degré)

On a un produit de 3 facteurs.
On peut associer 2 facteurs ensemble.
Ensuite seulement, on fait une distributivité.

► Le 3 peut être groupé (associé) au 2e facteur.

On obtient alors : $\boxed{f(x)=(3x-3)\left(x+\dfrac{5}{3}\right)}$ (une autre forme factorisée en facteurs du premier degré).

► Le 3 peut être groupé (associé) avec (au) 3e facteur.

On obtient alors : $\boxed{f(x)=(3x+5)(x-1)}$ (une autre forme factorisée en facteurs du premier degré).
On peut dire que cette dernière forme est la « meilleure » car elle ne fait plus intervenir de fraction.

VIII. Signe d'un polynôme du second degré

1°) Différents cas possibles

$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$
On veut étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Méthode

→ On va utiliser une forme factorisée en facteurs du premier degré lorsque $\Delta\geqslant 0$.

→ On va utiliser la forme canonique lorsque $\Delta<0$.

1er cas : $\boxed{\Delta>0}$

Le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$.
(On suppose que $x_1<x_2$).

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=\underline{\underline{a}}(x-x_1)(x-x_2)$

$a=0$
impossible

$x-x_1=0$
$x=x_1$

$x-x_2=0$
$x=x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
SGN de a		SGN de a		SGN de a		SGN de a	
SGN de $1x-x_1$		–	0	+		+	
SGN de $1x-x_2$		–		–	0	+	
SGN de $f(x)$		SGN de a	0	SGN contraire de a	0	SGN de a	

2^e^ cas : $\boxed{\Delta = 0}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

$a = 0$ impossible	$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ $x + \dfrac{b}{2a} = 0$ $x = -\dfrac{b}{2a}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
SGN de a		SGN de a		SGN de a	
SGN de $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$		+	0	+	
SGN de $f(x)$		SGN de a	0	SGN de a	

3^e^ cas : $\boxed{\Delta < 0}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\underbrace{\left[\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{positif ou nul}} \underbrace{-\frac{\Delta}{4a^2}}_{\text{positif strict}}\right]}_{\text{positif strict}}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
SGN de $f(x)$	SGN de a	

2°) Règle du signe du trinôme

$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ $(a \neq 0)$

$\boxed{\Delta > 0}$

2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$, $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
SGN de $f(x)$		SGN de a	0	SGN contraire de a	0	SGN de a	

On dit que le polynôme est toujours du signe de a sauf pour x entre les racines.

$\boxed{\Delta = 0}$

une racine double dans $\mathbb{R}$, x_0

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
SGN de $f(x)$		SGN de a	0	SGN de a	

$\boxed{\Delta < 0}$

(aucune racine dans $\mathbb{R}$)

*

*

x	$-\infty$	$+\infty$
SGN de $f(x)$	SGN de a	

Retenir :

- Quand $\Delta > 0$, on a 3 signes.
- Quand $\Delta = 0$, on a 2 signes.
- Quand $\Delta < 0$, on a 1 signe.

3°) Exemples de résolution d'inéquations du second degré

- **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$ (1).**

Considérons le polynôme $x^2 + 4x - 5$.

Les racines de ce polynôme sont 1 (racines évidentes) et – 5 (obtenue par produit).

Comme il y a deux racines, on peut dire que le discriminant du polynôme est strictement positif.
On peut aussi dire que le coefficient de x^2 et le coefficient constant sont de signes contraires.

D'après la règle du signe d'un polynôme du second degré, on peut dresser le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
SGN de x^2+4x-5		+	0	–	0	+	

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$\boxed{S_1 = \left]-\infty\,;-5\right] \cup \left[1\,;+\infty\right[}$

• **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x^2+x-1>0$ (2).**

Considérons le polynôme $-2x^2+x-1$.

Recensement des coefficients :
$a=-2$; $b=1$; $c=-1$

Calcul du discriminant

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 1^2-4\times(-2)\times(-1)\\ &= -7\end{aligned}$$

On a : $\Delta<0$ donc le polynôme est du signe de a c'est-à-dire strictement négatif.

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$\boxed{S_2=\varnothing}$

4°) Cas particuliers (pour gagner du temps)

• N.-B. : résolution d'inéquations du second degré incomplètes
Ne pas utiliser de discriminant.

• SGN de x^2-9

3 et – 3 sont racines évidentes.
Donc $\Delta>0$.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
SGN de $1\,x^2-9$		+	0	–	0	+	

+

• SGN de $\dfrac{x+5}{x-1}$ $(x\neq 1)$

SGN de $\dfrac{x+5}{x-1}=$ SGN de $\left[(x+5)(x-1)\right]$

$(x+5)(x-1)=x^2+4x-5$

$(x+5)(x-1)$ est un polynôme du second degré.

– 5 et 1 sont racines évidentes.
Donc $\Delta>0$.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
SGN de $\dfrac{x+5}{x-1}$		+	0	–	‖	+	

5°) Point-méthode

Pour déterminer le signe d'un polynôme du second degré (sous forme d'un tableau), on commence par s'interroger sur l'existence et la détermination des racines éventuelles.

Rappel de définition : Les racines d'un polynôme sont les valeurs qui annulent ce polynôme.

Dans le cas où on a des racines apparentes, on conclut immédiatement que le discriminant est positif et l'on utilise la règle du signe.
Dans le cas où on n'a pas de racine apparente et où le polynôme est incomplet, on commence par calculer le discriminant puis, suivant son signe, on détermine les racines et on applique la règle du signe.

Dans le cas particulier d'un polynôme du second degré de la forme ax^2+c avec a et c de même signe, on trouve le signe immédiatement : c'est le signe de a quelle que soit la valeur de x.

Dans le cas particulier d'une identité remarquable, on n'oublie pas de factoriser. Le signe se déduit directement.

IX. Équations et inéquations bicarrées

1°) Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\underbrace{x^4+4x^2-5}_{}=0$ (1).

polynôme bicarré (4e degré mais incomplet en x et en x^3)

Il y a deux parties dans la résolution.

1ère partie :

On pose $X=x^2$ (changement d'inconnue).

On peut être surpris par cette notion de changement d'inconnue.
Il faut savoir qu'« on a le droit » d'effectuer un tel changement d'inconnue.
La technique permet ici de se ramener à une équation du second degré.

L'équation (1) s'écrit $X^2+4X-5=0$ $(1')$ (c'est l'équation « résolvante » d'inconnue X).

Considérons le polynôme X^2+4X-5 (du second degré en X).

1 est racine évidente donc le polynôme admet une autre racine α dans $\mathbb{R}$ (distincte ou confondue).

On a $\alpha\times 1=\dfrac{-5}{1}$ ce qui donne $\alpha=-5$.

Les racines du polynôme sont $X_1=1$ et $X_2=-5$.

On notera que l'on utilise des lettres majuscules car l'inconnue de $(1')$ est notée avec une majuscule.

2^{e} partie :

Or $X=x^2$.

Donc l'équation (1) (équation de départ) est successivement équivalente à :

$x^2=1$ ou $\underbrace{x^2=-5}_{\text{impossible dans } \mathbb{R}}$

$x=1$ ou $x=-1$

Donc l'ensemble des solutions de (1) (équation de départ) est $S=\{1\,;-1\}$.

Résolution d'un polynôme de degré 4 avec la calculatrice TI-83 Premium CE

- Taper sur la touche $\boxed{\text{seconde}}$ puis appuyer sur la touche $\boxed{\text{résol}}$.
- Chercher l'application PlySmlt2 et la sélectionner.
- Choisir la première rubrique nommée « racines d'un polynôme »
- Sélectionner le degré 4
- Puis appuyer sur la touche « graph »
- Rentrer les valeurs de a4, a3, a2, a1, a0 (coefficients du polynôme)
- Appuyer de nouveau sur « graph »
- Les résultats s'affichent pour chaque racine.

$\underbrace{\boldsymbol{x^4+4x^2-5}}=\mathbf{0}$

$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$

On tape :

$a_0=-5$

$a_1=0$

$a_2=4$

$a_3=0$

$a_4=1$

La résolution de l'équation par la calculatrice donne l'affichage suivant :

x1 = 2.236067977i

x2 = −2.236067977i

x3 = 1

x4 = −1

Cette année, on ne tient pas compte des deux premières solutions. Il s'agit de solutions non réelles qui seront étudiées l'année prochaine lors de l'étude des nombres complexes.
Le nombre i qui apparaît est un nombre complexe dont le carré est égal à – 1.

2°) Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4-10x^2+9\leqslant 0$ (2).

On raisonne de nouveau en deux parties.

1ère partie :

On pose $X=x^2$.

L'inéquation (2) s'écrit $X^2-10X+9\leqslant 0$.

Considérons le polynôme $X^2-10X+9$.

1 est racine évidente donc le polynôme admet une autre racine α dans $\mathbb{R}$ (distincte ou confondue).

$\alpha\times 1=\dfrac{9}{1}$

$\alpha=9$

Les racines du polynôme sont $X_1=1$ et $X_2=9$.

X	$-\infty$		1		9		$+\infty$
SGN de $X^2-10X+9$		+	0	–	0	+	

Donc $X\in[1\,;9]$.

2^{e} partie :

Or $X=x^2$.

Donc l'inéquation (2) (inéquation de départ) est équivalente à $1\leqslant x^2\leqslant 9$.

Il y a plusieurs méthode pour résoudre cette double inéquation :

1ère méthode :

On prend la racine carrée de chaque membre.

$\sqrt{1}\leqslant\sqrt{x^2}\leqslant\sqrt{9}$

$1\leqslant|\,x\,|\leqslant 3$ car $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{9}=3$ et $\sqrt{x^2}=|\,x\,|$

$-3\leqslant x\leqslant -1$ ou $1\leqslant x\leqslant 3$ (on se réfère à la définition de la valeur absolue d'un réel comme distance à 0)

2^{e} méthode :

On effectue une résolution graphique au moyen de la représentation graphique de la fonction « carré ».

3[e] méthode :

$\begin{cases} 1 \leqslant x^2 \\ x^2 \leqslant 9 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0 \\ x^2 - 9 \leqslant 0 \end{cases}$

$x^2 - 1$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et – 1.
$x^2 - 9$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 3 et – 3.

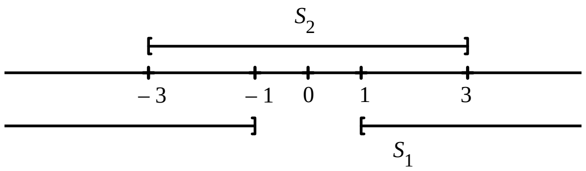
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $x^2 - 1$		+	0	–	0	+	

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
SGN de $x^2 - 9$		+	0	–	0	+	

L'ensemble des solutions de la 1[ère] inéquation est $S_1 = \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[1\,;+\infty\right[$.
L'ensemble des solutions de la 2[e] inéquation est $S_2 = [-3\,;3]$.

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est :

$\boxed{S = S_1 \cap S_2}$



$\boxed{S = [-3\,;-1] \cup [1\,;3]}$

Variante générale pour la totalité de la résolution :

L'inéquation s'écrit $1(X-1)(X-9) \leqslant 0$ soit $(X-1)(X-9) \leqslant 0$.

Or $X = x^2$.

Donc l'inéquation de départ est équivalente à : $(x^2-1)(x^2-9) \leqslant 0$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
SGN de $x^2 - 1$		+		+	0	–	0	+		+	
SGN de $x^2 - 9$		+	0	–		–		–	0	+	
SGN de $(x^2-1)(x^2-9)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{S = [-3\,;-1] \cup [1\,;3]}$.

On peut vérifier aisément l'ensemble des solutions à l'aide de la calculatrice en traçant la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 10x^2 + 9$.

X. Complément sur somme et produit des racines : recherche de deux nombres connaissant la somme et le produit

1°) Introduction

● Écrire une équation du second degré dont les racines sont – 1 et 2.

– 1 et 2 sont les racines de l'équation $(x+1)(x-2) = 0$.
Il s'agit d'une équation « produit nul » dont les solutions apparaissent immédiatement.
En développant le membre de gauche de l'équation, on obtient l'équation équivalente $x^2 - x - 2 = 0$.

● On peut généraliser à plusieurs réels. Par exemple, une équation dont les solutions sont – 1, 2 et 3 est $(x+1)(x-2)(x-3) = 0$.

2°) Étude de la condition nécessaire

a et b sont deux réels.

a et b sont solutions de l'équation $\quad (x-a)(x-b) = 0$
$\quad x^2 - ax - bx + ab = 0 \quad$ (on développe)

La somme $-ax - bx$ se réduit en $-(a+b)x$ (par factorisation).

On peut donc dire que a et b sont les solutions de l'équation $x^2 - \underbrace{(a+b)}_{S}x + \underbrace{ab}_{P} = 0$.

Conclusion :

a et b sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ d'inconnue x avec $S = a + b$ et $P = ab$.

Autrement dit, a et b sont solutions de l'équation $x^2 - (\text{somme})x + \text{produit} = 0$.

4°) Étude de la condition suffisante

Si deux nombres sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$,
alors leur somme est égale à $-\frac{-S}{1} = S$ (le 1 au dénominateur correspond au coefficient de x^2) et leur produit est égal à $\frac{P}{1} = P$.

5°) Application

Bilan de l'étude des paragraphes 3°) et 4°) :

> La détermination de deux nombres de somme S donnée et de produit P donné se ramène à la résolution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

En pratique, on utilise directement la formule.

Exemples :

● **Exemple 1 :**

Déterminer deux nombres dont la somme est égale à 7 et dont le produit est égal à l2.

1ère méthode : système (à éviter)

2e méthode : application de ce qui précède (à privilégier)

Ces deux réels, s'ils existent, sont solutions de l'équation $X^2 - 7X + 12 = 0$ (équation résolvante)

On se ramène ainsi à la résolution d'une équation du second degré.

Considérons le polynôme $X^2 - 7X + 12$.

$a = 1$; $b = -7$; $c = 12$

Calcul du discriminant

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 49 - 48\\ &= 1\end{aligned}$$

On a : $\Delta > 0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$X_1 = 4$ $\qquad$ $X_2 = 3$

Les nombres cherchés sont 3 et 4.

Vérification :

$4 + 3 = 7$

$4 \times 3 = 12$

● **Exemple 2 :**

Résoudre le système $\begin{cases} x - y = 4 \\ x \times y = -1 \end{cases}$.

On cherche à déterminer deux réels dont la différence entre le plus grand et le plus petit vaut 4 et le produit vaut – 1.

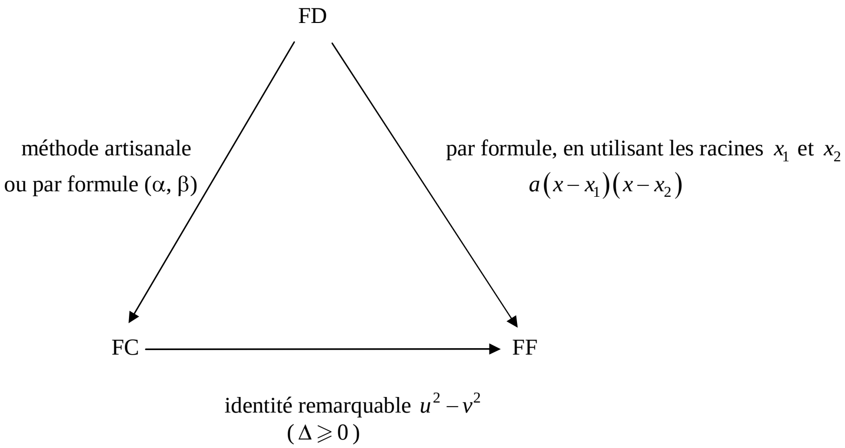
x et $-y$ sont les racines de l'équation $X^2 - 4X - 1 = 0$.

On obtient les couples $\left(\sqrt{3}+2\,;\sqrt{3}-2\right)$ et $\left(-\sqrt{3}+2\,;-\sqrt{3}-2\right)$.

Version problème concret :

Déterminer les dimensions d'un rectangle dont l'aire vaut …. et le périmètre vaut ….

Schéma général important :



LEXIQUE

Fonction polynôme du second degré **Fonction trinôme**	Fonction f vérifiant les deux conditions : C_1 : $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$ C_2 : il existe trois réels a, b, c avec $a\neq 0$ tels que $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=ax^2+bx+c$
Polynôme du second degré	Expression de la forme ax^2+bx+c ($a\neq 0$) (x : la variable du polynôme)
Coefficients	a, b, c (N.B. : $a\neq 0$) c : coefficient constant
Polynôme du second degré incomplet	$b=0$ ou $c=0$
Racine d'un polynôme ax^2+bx+c	Valeur de x qui annule le polynôme ou solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$
Racine évidente	Racine que l'on trouve facilement ou que l'on trouve par calcul mental (souvent 0, 1, 2, – 1, – 2)
Forme canonique	$a(x-\alpha)^2+\beta$
Discriminant	$\Delta=b^2-4ac$ Sert à déterminer le nombre de racines du polynôme suivant son signe et à donner leurs expressions.
Discriminant réduit	$b'=\dfrac{b}{2}$ $\Delta'=b'^2-ac$