1ère S

Le plan muni d'un repère

Ce chapitre fait suite à celui des vecteurs du plan.

Objectif : consolider et compléter les bases de géométrie analytique dans le plan de seconde (repérage des points dans le plan).

I. Repère du plan

1°) Rappels de seconde

Un **repère du plan** est un triplet (O, I, J) de points non alignés.

On dit que :

- O est **l'origine** du repère ;
- la droite graduée de repère (O, I) est **l'axe des abscisses** ; on le note souvent (Ox) ;
- la droite graduée de repère (O, J) est **l'axe des ordonnées** ; on le note souvent (Oy) .

On pose $\vec{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$.

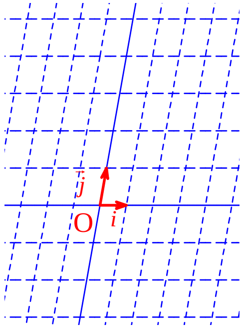
Le repère est plutôt noté (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

2°) Définition

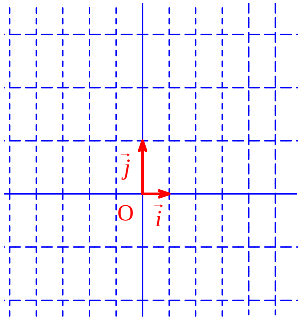
On appelle **repère (cartésien) du plan** tout triplet $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où O est un point fixé du plan et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs **non colinéaires** du plan.

3°) Différents types de repère

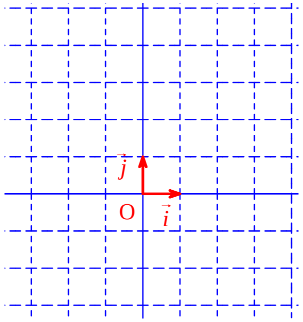
On distingue 3 types de repère (selon le maillage obtenu) :



Repère quelconque ou repère oblique (repère « penché »)
La maille est un parallélogramme.



Repère orthogonal
La maille est un rectangle.
Les axes sont perpendiculaires en O.



Repère orthonormé
La maille est un carré de côté 1.
Les axes sont perpendiculaires en O et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ (pour l'unité de longueur choisie).

Les axes de repère (O, $\vec{i}$) et (O, $\vec{j}$) sont appelés **les axes du repère**.
On dit que le couple $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une **base** de l'ensemble des vecteurs du plan.

II. Cordonnées d'un point

1°) Théorème

$\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère du plan.
Pour tout point M du plan, il existe un unique couple (x, y) de réels tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

2°) Définition

On dit que x et y sont les **coordonnées** (cartésiennes) de M dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
x : **abscisse** de M
y : **ordonnée** de M

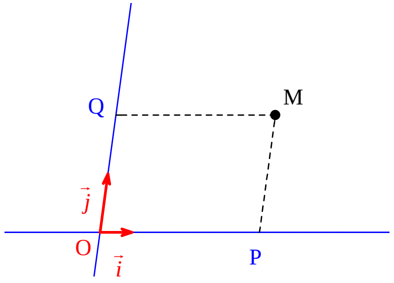
Notations :

$$\mathrm{M}(x\,;y) \text{ ou } \mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ou } \mathrm{M}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$$

Remarque : un repère est un triplet ordonné $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ constitué d'un point et de deux vecteurs (attention à l'ordre de ces deux vecteurs). L'ordre des deux vecteurs est capital quand on écrit l'égalité vectorielle qui traduit qu'un point M a pour coordonnées (x, y) dans ce repère.

3°) Démonstration

Il existe un unique point P de l'axe des abscisses et un unique point Q de l'axe des ordonnées tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$.



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ est colinéaire à $\vec{i}$ donc il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{i}$.
$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ est colinéaire à $\vec{j}$ donc il existe un unique réel y tel que $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = y\vec{j}$.

On obtient : $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j}}$.

4°) Exemple

$A\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

III. Cordonnées d'un vecteur

1°) Théorème

$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère du plan.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple (x, y) de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

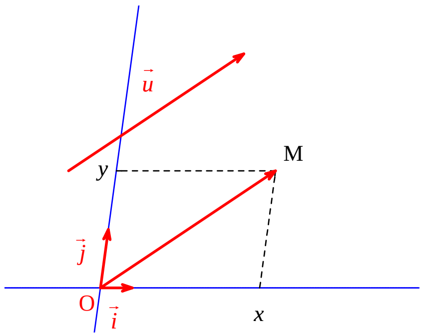
On parle de **décomposition** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

2°) Définition

On dit que x et y sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ de l'ensemble des vecteurs du plan.

3°) Démonstration

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
On a vu qu'il existait un unique couple (x, y) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Retenir : $\boldsymbol{\vec{u}(x, y)}$ **signifie** $\boldsymbol{\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}}$.

IV. Propriétés des coordonnées

1°) Propriété 1 (égalité de deux vecteurs)

● **Énoncé**

$\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont deux vecteurs quelconques du plan.
$\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

● **Démonstration**

Découle de l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base.

2°) Propriété 2 (coordonnées de la somme de deux vecteurs)

● **Énoncé**

$\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont deux vecteurs quelconques du plan.
Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\left(x + x', y + y'\right)$.

● **Démonstration**

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$
$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$
$\vec{u} + \vec{v} = \left(x + x'\right)\vec{i} + \left(y + y'\right)\vec{j}$

3°) Propriété 3 (coordonnées du produit d'un vecteur par un réel)

● **Énoncé**

$\vec{u}(x, y)$ est un vecteur quelconque du plan.
λ est un réel quelconque.
Le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $\left(\lambda x, \lambda y\right)$.

● **Démonstration**

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$
$\lambda\vec{u} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}$

4°) Propriété 4 (coordonnées d'un vecteur défini par deux points)

● Énoncé

$\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$ sont deux points quelconques du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $\left(\boldsymbol{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}, \boldsymbol{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}\right)$.

● Démonstration

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = x_{\mathrm{A}}\vec{i} + y_{\mathrm{A}}\vec{j}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x_{\mathrm{B}}\vec{i} + y_{\mathrm{B}}\vec{j}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\vec{i} + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})\vec{j}$$

5°) Propriété 5 (coordonnées du milieu d'un segment)

● Énoncé

$\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$ sont deux points quelconques du plan.
Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{\boldsymbol{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}}{\mathbf{2}}, \dfrac{\boldsymbol{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}}{\mathbf{2}}\right)$.

● Démonstration

I milieu de [AB] signifie que $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$.

Donc $\begin{cases} x_{\mathrm{I}} - x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{I}} \\ y_{\mathrm{I}} - y_{\mathrm{A}} = y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{I}} \end{cases}$

D'où

$$\begin{cases} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2} \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2} \end{cases}$$

V. Exemples de présentation des calculs de coordonnées

1°) Exemple 1

$\vec{u}(-1, 7)$ et $\vec{v}(4, -3)$

Calculer les coordonnées du vecteur $3\vec{u} - \vec{v}$.

$$3\vec{u} - \vec{v} \left| \begin{array}{l} 3x_{\vec{u}} - x_{\vec{v}} = 3\times(-1) - 4 = -7 \\ 3y_{\vec{u}} - y_{\vec{v}} = 3\times 7 - (-3) = 24 \end{array} \right.$$

$3\vec{u} - \vec{v}(-7 ; 24)$

2°) Exemple 2

A(– 1 ; 4) et B(5 ; 6)

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \left| \begin{array}{l} x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = 5 - (-1) = 6 \\ y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} = 6 - 4 = 2 \end{array} \right.$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(6 ; 2)$

3°) Exemple 3

A(– 1 ; 4) et B(5 ; 6)

Calculer les coordonnées du milieu I de [AB].

$$\mathrm{I} \left| \begin{array}{l} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2} = \dfrac{4+6}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \end{array} \right.$$

I(2 ; 5)

VI. Vecteurs colinéaires

1°) Démonstration

$\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont deux vecteurs du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$ donc si et seulement si le tableau

x	x'
y	y'

est un tableau de proportionnalité.

Grâce aux produits en croix, on peut formuler ainsi la propriété :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x \times y' = y \times x'$ (on retrouve la propriété énoncée en seconde).

On peut encore formuler cette propriété sous la forme :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x \times y' - y \times x' = 0$.

2°) Propriété (critère analytique de colinéarité)

$\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires si et seulement si $\boldsymbol{xy' - yx' = 0}$.

Cette propriété regroupe en fait deux propriétés formulées à l'aide de « si …, alors … » (il s'agit de deux **implications**).

***P* : Si** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, **alors** $xy' - yx' = 0$.
***Q* : Si** $xy' - yx' = 0$, **alors** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

L'implication *Q* est la réciproque de l'implication *P*.

3°) Notation

Le réel $\boldsymbol{xy' - x'y}$ est appelé le **déterminant** du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ (car il sert à déterminer si deux vecteurs sont colinéaires ou non).

On note $\mathbf{det}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \boldsymbol{xy' - yx'}$.

coordonnées de $\vec{u}$ coordonnées de $\vec{v}$

Attention : il ne faut pas confondre cette notation utilisant deux barres avec celle de la valeur absolue d'un réel qui utilise aussi deux barres.

$\vec{u}(x, y)$ **et** $\vec{v}(x', y')$ **sont colinéaires si et seulement si** $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \mathbf{0}$.

On dit que l'on **« développe »** un déterminant.

4°) Exemples (présentation des calculs)

- $\vec{u}(9, 6)$ et $\vec{v}(6, 4)$

On calcule $\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 9 \times 4 - 6 \times 6 = 36 - 36 = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (on utilise l'implication *Q*).

- $\vec{u}(2, 3)$ et $\vec{v}(3, 5)$

On calcule $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 3 = 1 \neq 0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (on utilise la contraposée de l'implication *P* : **Si** $xy' - yx' \neq 0$, **alors** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires).

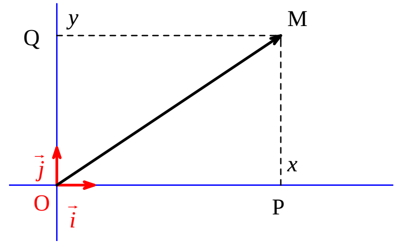
VII. Norme d'un vecteur et distance de deux points dans un repère orthonormé du plan

1°) Formule de la norme d'un vecteur

Le plan est muni d'un **repère orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque de coordonnées (x, y).

On note M le point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



Le quadrilatère OPMQ est un rectangle (car les axes du repère sont perpendiculaires).

Donc $OM^2 = OP^2 + OQ^2$ (théorème de Pythagore)

Or $OP = |x|$ (car $\|\vec{i}\| = 1$) et $OQ = |y|$ (car $\|\vec{j}\| = 1$).

On en déduit que : $OM^2 = |x|^2 + |y|^2$ soit $OM^2 = x^2 + y^2$.

Or $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ d'où $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\vec{u}\|$.

On retient :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2°) Distance de deux points

$A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points quelconques du plan **dans un repère orthonormé**.

$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix}$

On a $\mathbf{AB} = \|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

On retient aussi $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Remarque : En général, $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$.

3°) Exemple

A(– 1 ; 3) et B(3 ; 4)

Calculer AB.

Méthode pour les calculs de distance : commencer par calculer les coordonnées du vecteur.

$\overrightarrow{AB}(4, 2)$

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Formulaire

Coordonnées dans un repère (géométrie analytique)

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

M a pour coordonnées $(x ; y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ signifie que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $(x ; y)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ signifie que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points quelconques de *P*.

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ ou $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$

Pour tous vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ du plan et pour tout réel k

$\vec{u}+\vec{v}(x+x' ; y+y')$

$k\vec{u}(kx ; ky)$

Coordonnées du milieu de [AB] : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2} ; \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ ou $I\left|\begin{array}{l} x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{array}\right.$

$\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

On note $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$ (déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

Si le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est **orthonormé** c'est-à-dire $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ (pour l'unité de longueur choisie)

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Rappel sur les parallélogrammes

Comment démontrer qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme dans un repère

Dans le plan muni d'un repère, on donne quatre points A, B, C, D par leurs coordonnées.
On demande de démontrer que ABCD est un parallélogramme.
Il y a plusieurs méthodes possibles.

Le tableau ci-dessous propose un bilan des différentes méthodes possibles, avec un commentaire pour chacune d'elles.

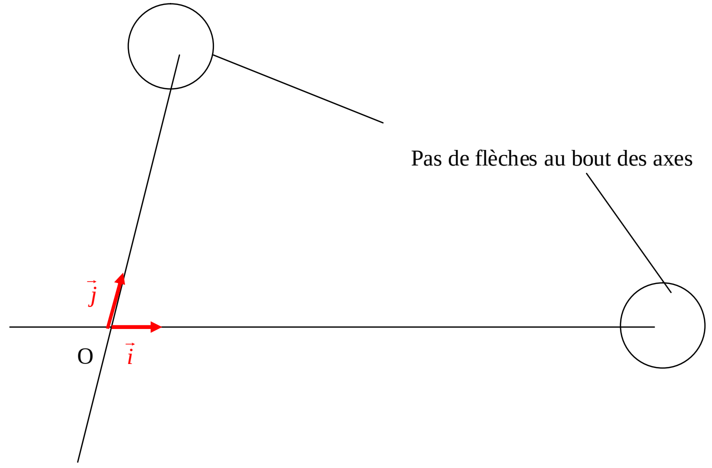
	On démontre que :	**Commentaire**
P_1	(AB) // (CD) AB = CD ABCD non croisé	long, à éviter
P_2	(AB) // (CD) (BC) // (AD)	long, à éviter
P_3	AB = CD BC = AD	long, à éviter faisable uniquement si le repère est orthonormé (car il faut pouvoir calculer des longueurs)
P_4	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	court, souvent la meilleur méthode
P_5	[AC] et [BD] ont le même milieu	faisable, mais n'est en général pas la méthode la plus habile

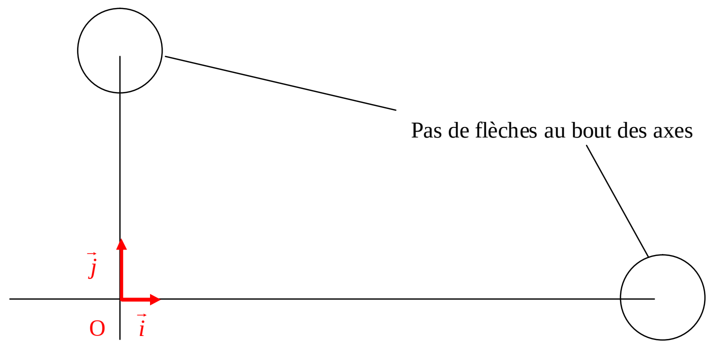
Mise en application

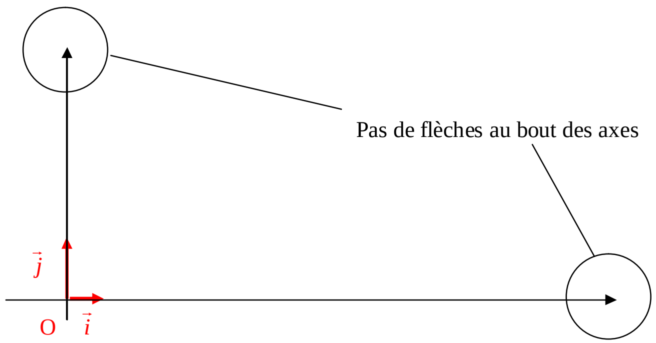
1. Les graphiques

- Placer le repère (l'origine, les vecteurs, les noms des vecteurs).
Inutile de mettre les flèches « de direction » sur les axes. On le mettait en 2^e^ car les repères étaient notés (O, I, J).
- Placer les points (pointillés parallèles aux axes et valeurs sur les axes).
- Coder.
- Ecrire les hypothèses : les coordonnées de tous les points doivent figurer sur une seule ligne soit en vertical soit en horizontal (parenthèses verticales ou horizontales).

L'écart angulaire entre les axes est aigu, obtus ou droit.
En pratique, on prend un angle aigu.







(Ox) et (Oy) sont les axes du repère.

2. La présentation des calculs

Calculs de coordonnées

- Les lettres en indices.

Pour un point A :
x_A désignera toujours l'abscisse de A ; y_A désignera toujours l'ordonnée de A.

Pour un vecteur $\vec{u}$:
$x_{\vec{u}}$ désignera toujours la première coordonnée de $\vec{u}$; $y_{\vec{u}}$ désignera toujours la deuxième coordonnée de $\vec{u}$.

Notation indicielle : la lettre doit être placée plus petite en bas de la ligne.

Ne pas écrire $3\vec{u}-\vec{v}=(-7\,;24)$.

- Présentation en vertical (avec une barre) ou en système (suivant les cas).

Passer d'une égalité vectorielle aux coordonnées

Une égalité vectorielle se traduit par deux égalités numériques que l'on présente en système.

Rédaction-type :

« L'égalité (1) est successivement équivalente à ….. »
« L'égalité (1) donne successivement »

On présente les systèmes les uns en dessous des autres.

Calcul de déterminant : attention aux signes

$\vec{u}(1, 2)$ et $\vec{v}(-4\,, 3)$

$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1\times3-2\times(-4)=3+8$.

Les parenthèses autour du – 4 sont obligatoires (sinon, l'écriture n'a pas de sens).

Les barres de coordonnées, de déterminant et les racines carrées à la règle.

$\overrightarrow{AB}\,\Big|$

règle

3. Les raisonnements

Déterminer si deux vecteurs sont colinéaires ou non.

Logique (implication) :

R : « A implique B ».

Réciproque de l'implication R :

S : « B implique A ».

Attention : R est vraie n'entraîne pas S vraie.

Contraposée de l'implication R :

T : « (non B) implique (non A) ».

R est vraie entraîne T vraie.

Caractérisation analytique de colinéarité ou **condition nécessaire et suffisante** (CNS) de la colinéarité de deux vecteurs.

On dira CNS de colinéarité.

4. Descartes

L'invention des coordonnées et de la géométrie analytique.

5. Utilisation d'un repère auxiliaire