Exercices sur les groupes

1 Soit (G, •) un groupe d'élément neutre e.
On considère deux éléments x et y de G tels que l'on ait $(xy)^p = e$ où p est un entier naturel non nul.
Démontrer que l'on a : $(yx)^p = e$.

2 Soit (G, •) un groupe d'élément neutre e tel que, pour tout élément x de G, on ait $x^2 = e$.
Démontrer que G est abélien.

3 Soit (G, •) un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G tel que $\text{card H} > \frac{1}{2}\text{card G}$.
Le but de cet exercice est de démontrer que $\text{H} = \text{G}$.
1°) Soit g un élément de G. On pose $\text{H}g = \{hg, h \in \text{H}\}$.
Démontrer que $h \mapsto hg$ induit une bijection de H sur Hg.
2°) Démontrer que $\text{H} \cap \text{H}g \neq \varnothing$.
3°) Conclure.

4 **(Utilise le résultat de l'exercice précédent)**
Soit (G, •) un groupe fini et f un homomorphisme de G dans G tel que $\text{card}\ \{x \in \text{G} \,/\, f(x) = x^{-1}\} > \frac{1}{2}\text{card G}$.
Démontrer que $f \circ f = \text{id}_{\text{G}}$.

Indication :
On pourra considérer l'ensemble $\text{H} = \{x \in \text{G} \,/\, (f \circ f)(x) = x\}$ puis démontrer que H est un sous-groupe qui contient $\{x \in \text{G} \,/\, f(x) = x^{-1}\}$.

5 Soit (G, •) un groupe fini.
Soit A et B deux parties de G telles que $\text{card A} + \text{card B} > \text{card G}$.
Le but de cet exercice est de démontrer que $\text{G} = \text{AB}$ c'est-à-dire que $\forall x \in \text{G}\ \exists (a, b) \in \text{A} \times \text{B}$ tel que $x = ab$.
1°) a) Soit x un élément de G. On pose $\text{A}^{-1}x = \{a^{-1}x,\ a \in \text{A}\}$.
Démontrer que $a \mapsto a^{-1}x$ induit une bijection de A sur $\text{A}^{-1}x$.
b) Démontrer que l'on a $\text{A}^{-1}x \cap \text{B} \neq \varnothing$.
2°) Conclure.

6 Soit (G, •) un groupe.
Démontrer que $Z(\text{G}) = \{a \in \text{G} \,/\, \forall b \in \text{G} \quad a \bullet b = b \bullet a\}$ est un sous-groupe commutatif de G.
Démontrer que pour tout élément α dans G et pour tout élément a de Z(G) on a : $\alpha^{-1} \bullet a \bullet \alpha \in \text{G}$.
On dit que Z(G) est un sous-groupe distingué ou normal de G.

7 **Groupe du rectangle**
Soit D et D' deux droites perpendiculaires du plan P. On note O leur point d'intersection.
Démontrer que l'ensemble $\text{G} = \{\text{id}_P, S_D, S_{D'}, S_{\text{O}}\}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe.
Établir sa table.

8 Soit (G, •) un groupe.
On se propose de démontrer que si A est une partie finie non vide de G stable par la loi •, alors A est un sous-groupe de G.

1°) **Méthode 1**
a) Soit a un élément de A. Démontrer qu'il existe deux entiers naturels k et l distincts tels que $a^k = a^l$.
b) Conclure.

2°) **Méthode 2**
a) Soit a un élément de A.
Démontrer que l'application $\varphi : \text{A} \to \text{A}$ est bijective.
$$x \mapsto ax$$
b) Conclure.

9 Soit (G, •) un groupe d'élément neutre e.
1°) Démontrer que l'hypothèse « $\forall (x, y) \in \text{G}^2 \quad (xy)^2 = x^2y^2$ » entraîne la commutativité de G.
2°) On suppose l'existence d'un entier naturel n pour lequel on a les trois propriétés
$\forall (x, y) \in \text{G}^2 \quad (xy)^n = x^n y^n$
$\forall (x, y) \in \text{G}^2 \quad (xy)^{n+1} = x^{n+1} y^{n+1}$
$\forall (x, y) \in \text{G}^2 \quad (xy)^{n+2} = x^{n+2} y^{n+2}$.
a) Démontrer que $\forall (x, y) \in \text{G}^2 \quad xy^n = y^n x$.
b) Démontrer que $\forall (x, y) \in \text{G}^2 \quad xy^{n+1} = y^{n+1} x$.
c) Démontrer que G est commutatif.

10 Soit G le groupe des racines septièmes de l'unité.
1°) Démontrer l'application f de G dans G définie par $f(x) = x^3$ est un automorphisme de groupe.
2°) Calculer $\prod_{\alpha \in \text{G}} (1 + \alpha + \alpha^2)$.

11 Dans $\mathbb{R}$, on définit la loi de composition interne $*$ définie par $a * b = a + b - ab$.
On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
1°) Démontrer que (E, $*$) est un groupe.
2°) Soit a un réel quelconque. Calculer $\underbrace{a * \ldots * a}_{n \text{ éléments}}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).
On pourra observer que : $a * b = 1 - (1 - a)(1 - b)$.

12 Dans $\mathbb{R}$, on définit la loi de composition interne $*$ définie par $a * b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$.
Démontrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe.

13 Soit (E, $*$) un ensemble muni d'une loi de composition interne et F un ensemble.
Soit f une application bijective de E dans F.
On pose pour tout couple (a, b) d'éléments de F, on pose $a\text{T}b = f\left[f^{-1}(a) * f^{-1}(b)\right]$.
1°) Démontrer que f est un isomorphisme de (E, $*$) dans (F, T).
2°) Démontrer que si (E, $*$) est un groupe, alors (F, T) est aussi un groupe.
3°) Soit (F', T') un ensemble muni d'une loi de composition interne et g une application de F' dans F.

Démontrer que g est un homomorphisme de (F', T') dans (F, T) si et seulement si il existe un homomorphisme h de (F', T') dans $(E, *)$ tel que $g = f \circ h$.

$\boxed{14}$ Dans $\mathbb{R}$, on définit la loi de composition interne $*$ définie par $a * b = a + b - ab$.

1°) Étudier les propriétés de la loi $*$.
Déterminer l'ensemble E des éléments inversibles par la loi interne $*$. Que peut-on dire de $(E, *)$?

2°) Soit a un réel quelconque. Calculer $\underbrace{a * ... * a}_{n \text{ éléments}}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$.

On pourra observer que : $a * b = 1 - (1-a)(1-b)$.

3°) Déterminer les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple $(x\,;y)$ de réels on ait $f(x+y) = f(x) * f(y)$.

$\boxed{15}$ Pour tout groupe $(\mathrm{G}, \bullet)$, on note $Z(\mathrm{G})$ le centre de G, ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G : $Z(\mathrm{G}) = \{x \in \mathrm{G} \,/\, \forall\, a \in \mathrm{G} \quad x \bullet a = a \bullet x\}$.

1°) Démontrer que $Z(\mathrm{G})$ est un sous-groupe commutatif de G.
2°) Soit $(\mathrm{G}, \bullet)$ et $(\mathrm{G}', *)$ deux groupes et f un homomorphisme de G dans G′.
a) Démontrer que si f est surjectif, alors $f\big(Z(\mathrm{G})\big) \subset Z(\mathrm{G}')$.

b) Démontrer que si f est injectif, alors $f^{-1}\big(Z(\mathrm{G}')\big) \subset Z(\mathrm{G})$.

Rappel : si f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F, on appelle image réciproque d'une partie B de F l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in E \,/\, f(x) \in \mathrm{B}\}$ (ensemble des antécédents des éléments de B).

$\boxed{16}$ Soit $(\mathrm{G}, \bullet)$ un groupe. On note e son élément neutre.

On considère deux éléments a et b tels que l'on ait : $a^{-1} \bullet b \bullet a = b^2$ et $b^{-1} \bullet a \bullet b = a^2$.
Calculer $(a \bullet b) \bullet (b \bullet a)$.
En déduire que a et b sont inverses l'un de l'autre puis que $a = b = e$.

$\boxed{17}$ On pose $E = \left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1°) L'addition est-elle une loi de composition interne sur E ?
2°) Même question pour la multiplication.

$\boxed{18}$ Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative notée $\bullet$.
Soit x et y deux éléments quelconques de E tels que $x \bullet y = y \bullet x$.

Démontrer que pour tout couple $(n\,;p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a : $x^n \bullet y^p = y^p \bullet x^n$.

$\boxed{19}$ On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne $*$, définie par l'expression

définie par $(x, y) * (x', y') = \left(x + x', y\mathrm{e}^{x'} + y'\mathrm{e}^{-x}\right)$.

1°) a) Démontrer que $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe.

b) Est-il commutatif ?

2°) Démontrer que les deux axes de coordonnées sont des sous-groupes de $(\mathbb{R}^2, *)$.

3°) Existe-t-il d'autres droites affines du plan qui sont des sous-groupes de $(\mathbb{R}^2, *)$?

$\boxed{20}$ Soit $(\mathrm{G}, \bullet)$ un groupe d'élément neutre e.
On pose $Z_0(\mathrm{G}) = \{e\}$ et on définit par récurrence $Z_n(\mathrm{G}) = \left\{x \in \mathrm{G} \,/\, \forall y \in \mathrm{G} \;\; x^{-1}y^{-1}xy \in Z_{n-1}\right\}$ pour $n \geqslant 1$.

Démontrer que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion de sous-groupe de G.

$\boxed{21}$ Soit $(\mathrm{G}, \bullet)$ un groupe et A une partie non vide de G.
Si x est un élément de G, on note $x\mathrm{A}^{-1} = \left\{xa^{-1}, a \in \mathrm{A}\right\}$.

1°) Démontrer que l'application $a \mapsto xa^{-1}$ induit une bijection entre A et $x\mathrm{A}^{-1}$.

2°) On suppose que G est fini et que $2 \operatorname{card} \mathrm{A} > \operatorname{card} \mathrm{G}$.
Démontrer que l'on a $\mathrm{A} \cap x\mathrm{A}^{-1} \neq \varnothing$, puis que tout élément de G est produit de deux éléments de A.
2°) Conclure.

$\boxed{22}$ Soit A et B deux sous-groupes d'un groupe $(\mathrm{G}, \bullet)$.
Démontrer que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ ou $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$.

$\boxed{23}$ **Le lemme des 5**

Soit A, B, C, D, E, A', B', C', D', E' 10 groupes.
Soit $f, g, h, k, f', g', h', k', p, q, r, s, t$ 13 morphismes de groupes.

La situation est la suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{B} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{C} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & \mathrm{D} \arrow[r, "k"] \arrow[d, "s"'] & \mathrm{E} \arrow[d, "t"'] \\
\mathrm{A'} \arrow[r, "f'"'] & \mathrm{B'} \arrow[r, "g'"'] & \mathrm{C'} \arrow[r, "h'"'] & \mathrm{D'} \arrow[r, "k'"'] & \mathrm{E'}
\end{tikzcd}$$

On suppose que :

a) les lignes sont exactes, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} g = f(\mathrm{A})$, $\operatorname{Ker} h = g(\mathrm{B})$, $\operatorname{Ker} k = h(\mathrm{C})$,
$\operatorname{Ker} g' = f'(\mathrm{A'})$, $\operatorname{Ker} h' = g'(\mathrm{B'})$, $\operatorname{Ker} k' = h'(\mathrm{C'})$.

b) les diagrammes sont tous commutatifs, c'est-à-dire que : $q \circ f = f' \circ p$, $r \circ g = g' \circ q$, $t \circ k = k' \circ s$.

e désigne l'élément neutre du groupe.

1°) Démontrer que (p surjective et q et s injectives) implique (r injective).
2°) Démontrer que (q et s surjectives et t injective) implique (r surjective).

Indication : l'énoncé semble un peu lourd mais c'est un exercice facile.

$\boxed{24}$ Pour tout couple (a, b) de réels, on pose $a * b = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$.

1°) Démontrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

2°) Retrouver le résultat du 1°) par une autre méthode en démontrant que la fonction $f : x \mapsto \operatorname{sh} x$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, *)$.

$\boxed{\textbf{25}}$ Pour tout couple (a, b) de réels, on pose $a * b = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$.
Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{sh} x$ est un homomorphisme bijectif de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, *)$.

Que peut-on en déduire pour la structure de $(\mathbb{R},*)$?

$\boxed{\textbf{26}}$ Pour tout couple (a, b) de réels, on pose $a * b = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$.
1°) Démontrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

2°) Démontrer que l'application f de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par $f(x) = \operatorname{sh} x$ est un isomorphisme de groupes

de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, *)$.

$\boxed{\textbf{27}}$ Soit G un groupe.

1°) Soit a un élément fixé de G.
Démontrer que l'application $\gamma_a : g \longmapsto ag$ est une bijection de G dans lui-même.

2°) Démontrer que l'application $\begin{array}{l} \mathrm{G} \to \mathrm{Bij}\,\mathrm{G} \\ a \longmapsto \gamma_a \end{array}$ est un homomorphisme de groupe injectif.

Questions de cours

$\boxed{1}$ Définition d'un sous-groupe d'un groupe. Intersection de deux sous-groupes.

$\boxed{2}$ Définition d'un homomorphisme de groupes. Propriétés d'un homomorphisme.

$\boxed{3}$ Définition du noyau d'un homomorphisme de groupes. Propriété. Caractérisation de l'injectivité d'un homomorphisme de groupes à l'aide du noyau.

$\boxed{4}$ Résolution des équations $a * x = b$ et $x * a = b$ dans un groupe (G, $*$).

$\boxed{5}$ Image directe et image réciproque d'un sous-groupe par un homomorphisme de groupes.

$\boxed{6}$ Sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Énoncer le théorème et faire la démonstration.

$\boxed{7}$ Sous-groupe engendré par un élément dans un groupe. Ordre d'un élément dans un groupe.

$\boxed{8}$ Démontrer que l'ensemble des bijections d'un ensemble E muni de la loi de composition des applications est un groupe.

$\boxed{9}$ Démontrer que l'ensemble des automorphisme d'un groupe (G, $*$) muni de la loi de composition des applications est un sous-groupe du groupe des bijections de G.

$\boxed{10}$ **Groupe fonctionnel**

Soit X un ensemble et (G, •) un groupe. On note F l'ensemble des applications de X dans G.

1°) Définir une loi de composition interne sur F.

2°) Démontrer que F muni de cette loi est un groupe.

3°) Que peut-on dire alors de F si (G, •) est abélien ?

$\boxed{12}$ Groupe produit. Définition.

$\boxed{13}$ Démontrer que dans un groupe tout élément est régulier c'est-à-dire simplifiable à gauche et à droite.

$\boxed{14}$ Automorphismes intérieurs dans un groupe.

$\boxed{15}$ Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne • associative.

Soit x et y deux éléments de E qui commutent. Soit p un entier naturel.

Compléter $(x \bullet y)^p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Réponses

$\boxed{3}$ Autre démonstration avec le théorème de Lagrange :

« Le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe ».
(Plutôt que de cardinal d'un groupe ou d'un sous-groupe, on parle de l'ordre).

Lemme :

Si $n \mid p$ et $n > \dfrac{p}{2}$, alors $n = p$.

Démonstration :

$\dfrac{p}{2} < n \leqslant p$ donc $\dfrac{1}{2} < \dfrac{n}{p} \leqslant 1$ d'où $\dfrac{n}{p} = 1$.

$\boxed{4}$ Utilise le résultat de l'exercice $\boxed{3}$.

$\boxed{8}$ Petites subtilités

1ère méthode : Une fois que l'on a montré que A était stable par l'inversion, il faut démontrer que A contient l'élément neutre de G.

$a^m = e_G$ donc $e_G \in \mathrm{A}$ et $a^{-1} \in \mathrm{A}$.

2e méthode :

Deux choses.
Il existe x dans A tel que $ax = a$ donc $e_G \in \mathrm{A}$.
Puis il existe y dans A tel que $ax = e_G$ donc $a^{-1} \in \mathrm{A}$.

$\boxed{15}$ 1°) Z(G) est un sous-groupe distingué de G commutatif.

$\boxed{18}$ On se sert de ce résultat quand on démontre le binôme de Newton.
On fixe p et l'on fait une récurrence sur n.
Ceci dit, pour prouver l'assertion pour $n = 1$, on fait une récurrence sur p.

$\boxed{19}$ Une structure de groupe dans le plan

3°) Les seuls sous-groupes possibles sont $\{(x, ax),\ x \in \mathrm{G}\}$ car (0,0) $\in$ G pas possible.

$\boxed{23}$ Le lemme des cinq

1°) On suit les flèches.
Soit c $\in$ C tel que r (c) = e. Démontrons que c = e, c'est-à-dire r injectif.

r (c) = e, donc s o h (c) = h' o r (c) = e.
s est injectif donc h(c) = e.
c $\in$ Ker h = Im g.
Soit b $\in$ B tel que c = g(b).
On a r(c) = e = r o g(b) = g' o q(b).
q(b) $\in$ Ker g' = Im f '.
Soit a' $\in$ A tel que a' = p(a).
C'est pratiquement fini : q(b) = f ' o p(a).
Or q est injectif donc b = f (a).
c = g(b) = g o f (a) = e car g o f = e.

2°) Cette partie est plus délicate que car il est souvent plus facile de manier l'injectivité que la surjectivité.
Soit c'$\in$ C'. h'(c')$\in$ D' et s est surjective, donc soit d $\in$ D tel que s (d) = h' (c').
k' o s (d) = k' o h' (c') = e = t o k (d)
Or t est injective donc k (d) = e.
d $\in$ Ker h = Im h.
Soit c $\in$ C, d = h (c), h'(c') = s o h (c) = h' o r (c)
On se dit tout heureux que c' = r (c). Eh bien non ! $h'\left(\mathrm{c}'r\left(\mathrm{c}^{-1}\right)\right) = \mathrm{e}$

Soit γ' $\in$ C' tel que h'(γ') = e, alors γ' $\in$ Im r.
En effet γ' $\in$ Ker h' = Im g '.

Soit β'$\in$ B' tel que γ' = g' (β').
Or q est surjective donc $\exists$ β $\in$ B β' = q (β).
γ' = g' o q (β) = r o g (β) $\in$ Im r.

On termine en utilisant c' r (c^{-1}) $\in$ Im r.
Or Im r est un sous-groupe de C' donc c' $\in$ Im r.