TS1

Contrôle du mardi 13 octobre 2015 (50 minutes)

Prénom : ……………………   Nom : ………………………………   **Note : …. / 20**

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x)^n}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Justifier que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O.

………

………

………

………

………

………

2°) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ ont la même tangente en O.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points + 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty\,;1]$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f\,'(x)$ pour $x \in \,]-\infty\,;1[$. Il n'est pas demandé d'arranger le résultat.

$\forall x \in \,]-\infty\,;1[\qquad f\,'(x) =$ ……………………………………………………………

2°) Compléter sans justifier les phrases :

- La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisse au point A d'abscisse …………… .
- La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $x - 2y = 0$ au point B d'abscisse …………… .

III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points + 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^5 + 3x^3 - 6$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f\,'(x)$ en donnant le résultat sous forme du produit de deux polynômes du second degré.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f\,'(x) =$ ……………………………………………………………

2°) Compléter le tableau récapitulatif suivant donnant le signe de la dérivée et les variations de la fonction *f*.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de	
Signe de	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

3°) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ $\quad$ (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $\text{I}=[1\,;2]$ (écrire une idée par ligne).
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de α (justifier).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (1 point)

On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x-1$ et $g : x \mapsto 1-x^2$.
On note *h* la composée de *f* suivie de *g* (autrement dit $h = g \circ f$).
Calculer $h(x)$ pour *x* réel quelconque. On donnera le résultat sous forme développée réduite.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (1 point)

Soit *k* un réel. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x$ si $x \leqslant k$ et $f(x)=x$ si $x>k$.

Existe-t-il une valeur de *k* pour laquelle la fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner cette valeur.

Répondre sans justifier.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VI. (2 points)

Soit *x* un réel quelconque tel que $-\dfrac{1}{2} < x \leqslant -\dfrac{1}{3}$. Déterminer $\text{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (justifier avec soin).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 13-10-2015

I.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x)^n}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Justifier que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(0) = \frac{0}{(1+0)^n} = 0$$

Donc toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O.

2°) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ ont la même tangente en O.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme fonction rationnelle.

Pour dériver facilement f_n, on écrit $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f_n(x) = x \times \dfrac{1}{(1+x)^n}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f_n\,'(x) = 1 \times \frac{1}{(1+x)^n} + x \times \left[-\frac{n}{(1+x)^{n+1}}\right]$$ (inutile d'arranger l'expression).

On sait que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_n$ en O est égal à $f_n\,'(0)$.

$$\begin{aligned} f_n\,'(0) &= \frac{1}{(1+0)^n} + 0 \times \left[-\frac{n}{(1+0)^{n+1}}\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc la tangente à $\mathcal{C}_n$ en O a pour coefficient directeur 1.

Cette tangente est donc la droite passant par O et de coefficient directeur 1.

On en déduit que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ ont la même tangente en O.

Remarque :

Cette tangente a pour équation $y = x$.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty\,;1]$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f\,'(x)$ pour $x \in]-\infty\,;1[$. Il n'est pas demandé d'arranger le résultat.

$$\forall x \in]-\infty\,;1[\quad f\,'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

2°) Compléter sans justifier les phrases :

• La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisse au point A d'abscisse $\dfrac{3}{4}$.

• La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $x - 2y = 0$ au point B d'abscisse 0.

On résout dans l'intervalle $]-\infty\,;1[$ l'équation $f\,'(x) = 0 \quad (1)$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 1 - x = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

La droite d'équation $x - 2y = 0$ a pour équation réduite $y = \dfrac{x}{2}$.

On résout dans l'intervalle $]-\infty\,;1[$ l'équation $f\,'(x) = \dfrac{1}{2} \quad (2)$.

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^5 + 3x^3 - 6$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$ en donnant le résultat sous forme du produit de deux polynômes du second degré.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2\left(5x^2+9\right)$$

2°) Compléter le tableau récapitulatif suivant donnant le signe de la dérivée et les variations de la fonction *f*.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de x^2		+	0	+	
Signe de $5x^2+9$		+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0	+	
Variations de *f*			↗		

3°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0 \quad (\mathrm{E})$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\mathrm{I} = [1\,;2]$ (écrire une idée par ligne).
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de α (justifier).

f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme donc, par restriction, *f* est continue sur I.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par restriction, *f* est strictement croissante sur I.

$f(1) = -2$ et $f(2) = 50$

$0 \in [-2\,;50]$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle I.

Grâce à la calculatrice, on observe que $f(1{,}121) < 0$ et $f(1{,}122) > 0$.

> Avec la calculatrice, $f(1{,}121) = -0{,}003692975...$ et $f(1{,}121) = -0{,}003692975...$.
>
> Ce sont des nombres décimaux, mais cela ne présente pas d'intérêt d'écrire toutes les décimales.

Par suite, comme *f* est strictement croissante sur I, on a $1{,}121 < \alpha < 1{,}122$.

Donc l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de α est 1,121.

IV.

On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x-1$ et $g : x \mapsto 1-x^2$.
On note *h* la composée de *f* suivie de *g* (autrement dit $h = g \circ f$).
Calculer $h(x)$ pour *x* réel quelconque. On donnera le résultat sous forme développée réduite.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = g\left[f(x)\right]$

$= g(\mathrm{X})$ avec $\mathrm{X} = f(x)$ soit $\mathrm{X} = 2x-1$

$= 1 - \mathrm{X}^2$

$= 1-(2x-1)^2$

$= 1-\left(4x^2-4x+1\right)$

$= 4x - 4x^2$

V.

Soit *k* un réel. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x$ si $x \leqslant k$ et $f(x) = x$ si $x > k$.

Existe-t-il une valeur de *k* pour laquelle la fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner cette valeur.

Répondre sans justifier.

La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ pour $k = 0$.

Dans ce cas, *f* est la fonction « valeur absolue ».

VI.

Soit *x* un réel quelconque tel que $-\dfrac{1}{2} < x \leqslant -\dfrac{1}{3}$. Déterminer $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (justifier avec soin).

$-\dfrac{1}{2} < x \leqslant -\dfrac{1}{3}$ donc $-2 > \dfrac{1}{x} \geqslant -3$ (passage à l'inverse dans une inégalité ne comportant que des nombres de même signe)

Donc $-3 \leqslant \dfrac{1}{x} < -2$.

Cette dernière inégalité permet d'affirmer que $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -3$.