TS

Les intégrales

Plan du chapitre :

Georg Friedrich Bernhard Riemann, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, Royaume de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca.

Augustin Louis Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences.

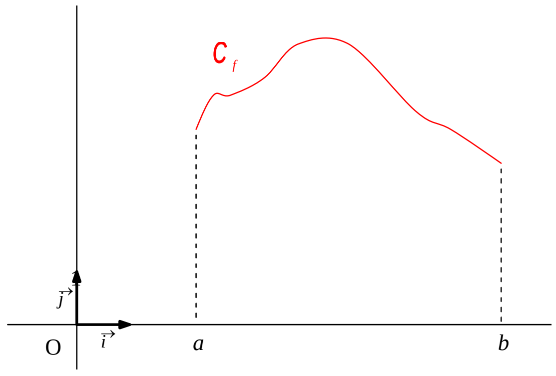
Grégoire de Saint-Vincent, né le 8 septembre 1584 à Bruges, comté de Flandre, (Pays-Bas catholiques) et décédé le 27 janvier 1667 à Gand, était un jésuite.

Le 14 décembre 2022
zone sphérique
calotte sphérique
segment sphérique
démonstration avec les intégrales

I. Introduction

1°) Problème

f est une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$ ($a \leqslant b$).
On se propose de calculer dans le plan muni d'un repère orthogonal l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



2°) Historique

● Méthode des rectangles : Pascal – Riemann → suites

● Méthode des fonctions : Leibniz – Newton → dérivées et primitives

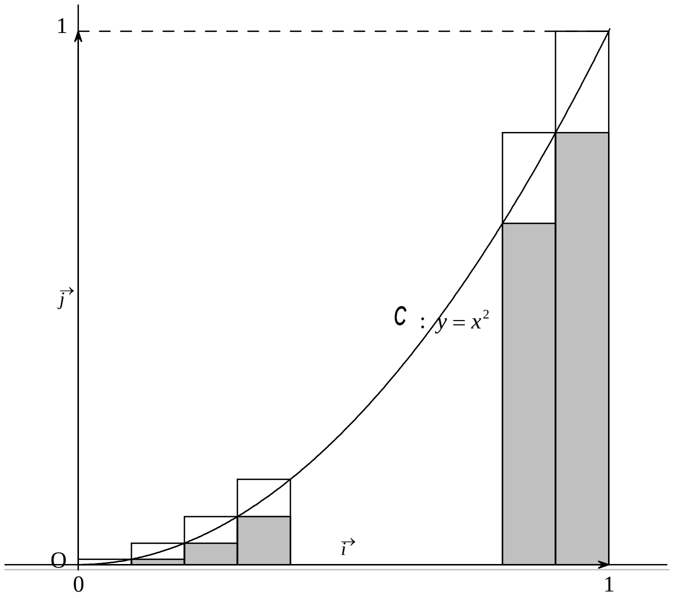
Cauchy – Riemann (XIX^{e} siècle) : calcul intégral

Bernhard Riemann (1826-1866) : mathématicien allemand

II. Deux points de vue

1°) 1er aspect : avec les suites

• Méthode des rectangles (Pascal – Riemann)



$\mathcal{A}$ = **aire sous la courbe sur [0 ; 1]**

On subdivise [0 ; 1] en n intervalles.

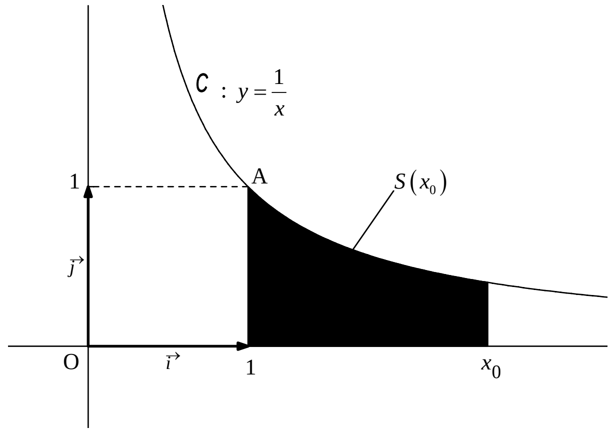
Avec le théorème des gendarmes, on démontre que :

$\mathcal{A} = \frac{1}{3} \underbrace{\text{u. a.}}_{\text{unité d'aire}}$

• Cette méthode est généralisable.

2°) 2e aspect : avec les fonctions dérivées et les primitives (Newton – Leibniz)

• Quadrature de l'hyperbole par Grégoire de Saint-Vincent



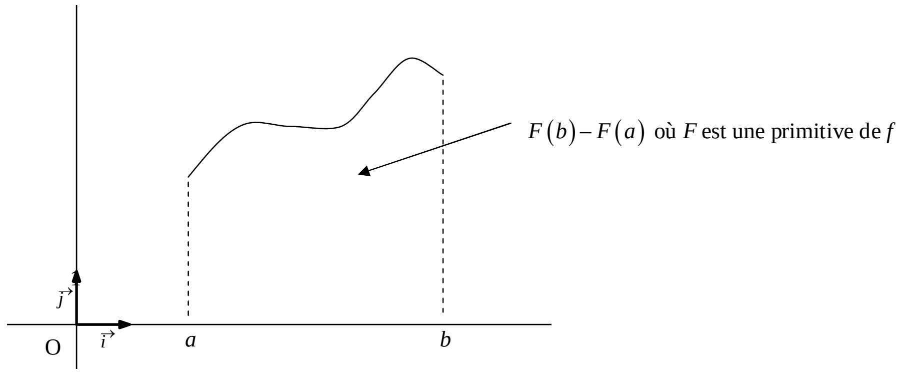
$S(x)$: aire sous la courbe sur l'intervalle [1 ; x] $(x \geqslant 1)$.

On démontre que S est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et que $\forall x \in [1 ; +\infty[\quad S'(x) = \frac{1}{x}$.

Comme $S(1) = 0$, on en déduit que $\forall x \in [1 ; +\infty[\quad S(x) = \ln x$.

• Cette méthode est généralisable.

f est continue et positive sur [a, b].



III. Définition. Conséquences

1°) Remarque

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Nous savons que f admet des primitives sur I (théorème de Darboux).
Considérons deux primitives F et G sur I.
Il existe donc un réel k tel que $\forall x \in \mathrm{I} \quad F(x) = G(x) + k$.
Étant donnés deux réels a et b quelconques dans I, on a :
$F(b) - F(a) = (G(b) + k) - (G(a) + k) = G(b) - G(a)$.

2°) Définition

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I.

F est une primitive de f sur I.

a et b sont deux réels quelconques dans I.

Le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F choisie.
On l'appelle **« intégrale de a à b de f »**.
On le note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$.

3°) Notations

$\int$: **symbole d'intégration** (S allongé et déformé).

L'écriture $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est purement symbolique.

a et b sont les **« bornes d'intégration »**.
Il y a toujours 2 bornes d'intégration. Ces bornes s'interprètent comme des abscisses dans le 5°).
L'ordre des bornes a une importance. On n'a pas forcément la plus petite borne en bas et la plus grande en haut.
Voir règle du **IV. 1°)**.

x est la **« variable d'intégration »** : **variable muette**, c'est-à-dire que l'on peut le remplacer par n'importe quelle autre lettre (t, u …) autre que f, a, b (et d).

Le « dx » n'a pas grande signification.
Il sert à délimiter l'intégrale.
Il sert aussi à préciser la variable par rapport à laquelle on intègre.
Il n'a pas d'influence sur le calcul.

16 mars 2013
dx → indique la variable

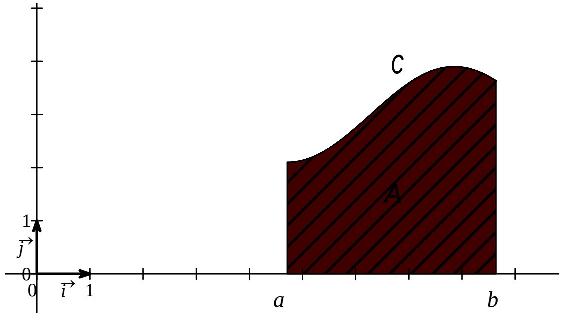
4°) Autre notation

$F(b) - F(a)$ se note aussi $\left[F(x)\right]_a^b$.

On écrit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b$.

5°) Interprétation géométrique

f est une fonction **positive ou nulle** et continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ $(a \leqslant b)$.



$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Nous y reviendrons dans le paragraphe **VIII**.

6°) Exemple

Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^2 (3x^2 + 2x - 5)\,\mathrm{d}x$.

Existence de l'intégrale :

La fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 2x - 5$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme donc sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
Donc f est intégrable sur $[0\,;\,2]$.

Calcul par la « méthode des crochets » :

$$\mathrm{I} = \Big[\underbrace{x^3 + x^2 - 5x}_{\text{une primitive}}\Big]_0^2$$

$$= (2^3 + 2^2 - 5\times 2) - (0^3 + 0^2 - 5\times 0) \quad \text{(on passe en numérique)}$$

$$= 2$$

On peut vérifier les résultats sur calculatrice (voir paragraphe **XII.**).

IV. Propriétés de l'intégrale pour les bornes

1°) Propriété 1 : ordre des bornes

f est une fonction continue sur un intervalle I.
a et b sont deux réels quelconques dans I.
$$\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Attention à l'ordre des bornes.

Démonstration :

On note F une primitive de f sur I.

$$\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\left[F(b) - F(a)\right] = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

2°) Propriété 2

f est une fonction continue sur un intervalle I.
a est un réel quelconque dans I.
$$\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

Démonstration :

On note F une primitive de f sur I.
$$\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$$

3°) Relation de Chasles

f est une fonction continue sur un intervalle I contenant a, b, c.
$$\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Démonstration :

On note F une primitive de f sur I.

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x &= \cancel{F(c)} - F(a) + F(b) - \cancel{F(c)}\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

V. Propriétés pour les opérations algébriques (linéarité de l'intégrale)

1°) Propriété 1 (intégrale d'une somme)

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b.
On a : $\displaystyle\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.

Démonstration :

On note F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I.

On sait que $F + G$ est alors une primitive de $f + g$ sur I (propriété du cours sur les primitives qui se démontre très facilement : $(F+G)' = F' + G' = f + g$).

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]\ \mathrm{d}x &= \left[(F+G)(x)\right]_a^b\\ &= (F+G)(b) - (F+G)(a)\\ &= \left(F(b) + G(b)\right) - \left(F(a) + G(a)\right)\\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)\\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

2°) Propriété 2 (intégrale du produit d'une fonction par une constante)

f est une fonction continue sur un intervalle I contenant *a* et *b*.
λ est un réel quelconque.
On a : $\int_a^b \lambda \times f(x)\, \mathrm{d}x = \lambda \times \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.

Démonstration :

On note F une primitive de f sur I.

On sait que λF est une primitive de λf sur I (propriété du cours sur les primitives qui se démontre très facilement : $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$).

$$\int_a^b \lambda \times f(x)\, \mathrm{d}x = \left[(\lambda F)(x)\right]_a^b$$

$$= (\lambda F)(b) - (\lambda F)(a)$$

$$= \lambda F(b) - \lambda F(a)$$

$$= \lambda\left[F(b) - F(a)\right] \qquad \text{(on effectue une factorisation)}$$

$$= \lambda \times \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

VI. Intégrales et inégalités

1°) Propriété 1 (signe d'une intégrale)

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ $(a \leqslant b)$.

- Si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \geqslant 0$ **(positivité de l'intégrale)**.
- Si $f \leqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant 0$.

Remarque :
La notation « $f \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ » est tout à fait autorisée.
Elle signifie que $\forall x \in [a\,;\,b] \quad f(x) \geqslant 0$.
Même chose pour la notation « $f \leqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ ».

Démonstration :

On note F une primitive de f sur $[a\,;\,b]$.
$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

<u>1^er cas :</u> $f \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$

On sait que $F' = f$ ce qui donne $F' \geqslant 0$ donc F est croissante sur $[a\,;\,b]$.
Comme $a \leqslant b$ par hypothèse, on a $F(a) \leqslant F(b)$ d'où $F(b) - F(a) \geqslant 0$.
Donc $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \geqslant 0$.

<u>2^e cas :</u> $f \leqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$

Idem.

Remarque :

Il faut bien remarquer que $a \leqslant b$.

2°) Propriété 2 (« croissance » de l'intégrale)

f et *g* sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ $(a \leqslant b)$.

Si $f \leqslant g$ sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$.

Démonstration :

On sait que $f \leqslant g$ sur $[a\,;\,b]$.

Donc $f - g \leqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ et $f - g$ est continue sur $[a\,;\,b]$.

D'après 1°), on a donc : $\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x \leqslant 0$.

Or par linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

D'où $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x \leqslant 0$.

Par suite, $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$.

Cette propriété permet de comparer des intégrales, d'établir des inégalités entre intégrales sans les calculer.

VII. Formule d'intégration par parties (IPP)

1°) Formule d'IPP

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I.
a et b ont deux réels quelconques dans I.

On a : $\displaystyle\int_a^b u'(x)\ v(x)\ \mathrm{d}x = \left[u(x)\ v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\ v'(x)\ \mathrm{d}x$.

2°) Démonstration ROC

① u et v sont dérivables sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

② $u'v$ et uv' sont continues sur I donc $u'v+uv'$ est également continue sur I.

$$\int_a^b \underbrace{\left[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\right]}_{(uv)'(x)}\ \mathrm{d}x =$$

$\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale

$\left[u(x)v(x)\right]_a^b$

D'où $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b$

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

3°) Intérêt de la formule d'IPP pour le calcul d'intégrales

Permet de transformer une intégrale « problématique » (qu'on ne sait pas calculer) en une intégrale plus simple qu'on sait calculer.

4°) Exercice

Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin 2x\ \mathrm{d}x$.

On ne reconnaît pas une forme.

On utilise la formule d'IPP.

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x}$$

1[er] **choix :** $u'(x) = x$ $\qquad v(x) = \sin 2x$

$u(x) = \dfrac{x^2}{2}$ $\qquad v'(x) = 2\cos 2x$

On choisit $u : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $v : x \mapsto \sin 2x$.
u et v sont définies et dérivables sur $[0\ ;\ \pi]$.

u' et v' sont continues sur $[0\ ;\ \pi]$.

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} x\ \sin 2x\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$$

Donc d'après la formule d'IPP :

$$\mathrm{I} = \left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I} = \left[\frac{x^2}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{x^2}{2} \times 2\cos 2x\ \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I} = \underbrace{\frac{\pi^2}{2}\sin 2\pi}_{0} - \underbrace{\frac{0^2}{2}\sin 0}_{0} - \int_0^{\pi} x^2\cos 2x\ \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I} = -\int_0^{\pi} x^2\cos 2x\ \mathrm{d}x$$

On ne sait pas calculer : mauvais choix.

2^e choix : $u'(x)=\sin 2x \qquad v(x)=x$

$u(x)=-\dfrac{\cos 2x}{2} \qquad v'(x)=1$

On choisit $u : x \mapsto -\dfrac{\cos 2x}{2}$ et $v : x \mapsto x$.
u et v sont définies et dérivables sur [0 ; π].

u' et v' sont continues sur [0 ; π].

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi} x\sin 2x \,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc d'après la formule d'IPP :

$$\mathrm{I}=\big[u(x)v(x)\big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}=\left[-\frac{\cos 2x}{2}\times x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\frac{\cos 2x}{2}\times 1\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}=\underbrace{-\frac{\cos 2\pi}{2}\times\pi}_{\frac{\pi}{2}}+\underbrace{\frac{\cos 0}{2}\times 0}_{0}+\int_0^{\pi}\frac{\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$\mathrm{I}=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\pi-\frac{1}{4}\sin 0$$

$$\boxed{\mathrm{I}=-\frac{\pi}{2}}$$

5°) Quelques méthodes pour gagner du temps dans les choix

- $\displaystyle\int_a^b P(x)\,\ln x\,\mathrm{d}x$

  ↑ polynôme

Choix : $u'(x)=P(x)$ et $v(x)=\ln x$ (« on tue le ln »).
(On ne connaît pas de primitive de ln en T^ale).

- $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha\neq 0)$

Choix : $u'(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}$ d'où $u(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}$

$v(x)=x$ d'où $v'(x)=1$ (« on tue le x »).

6°) Remarque

Parfois on est obligé de faire 2 IPP (2 au maximum en TS).

Exemple :

$$\int_0^{\pi} x^2\sin x\,\mathrm{d}x$$

Attention dans les calculs aux − en particulier.
Dans ce cas, noter u_1, v_1, u_2 et v_2 les fonctions.

7°) À propos de la formule d'intégration par parties

① La formule d'IPP fait intervenir une fonction sous forme d'une dérivée par le produit d'une fonction sous « forme originale ».

②

$$\big[u(x)v(x)\big]_a^b\neq\int_a^b u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\big[u(x)v(x)\big]_a^b=u(b)v(b)-u(a)v(a)$$

③ **Principe ALPES**

ALPES : Arccos/Arcsin/Arctan ; ln ou log ; puissance ; e^x ; sin/cos

Françoise Sévenier TS1

Principe ALPES → dans l'ordre on prend comme fonction v à dériver Arccos/Arcsin/Arctan ; ln ou log ; fonctions puissances ou puissances ; fonction exponentielle ; fonctions sinus et cosinus.

x, x^2 → considérées comme des fonctions puissances
On utilise le principe ALPES pour celle que l'on veut dériver (v).

C'est pour gagner du temps et avoir tout de suite une intégrale que l'on sait calculer.

VIII. Valeur moyenne d'une fonction

Rappel : définition de la moyenne arithmétique

La valeur moyenne (ou moyenne arithmétique) de n réels x_1, x_2, …, x_n (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) est donnée par $m=\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ (somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs).

1°) Définition [valeur moyenne d'une fonction]

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ $(a<b)$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\,;\,b]$ le réel $\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

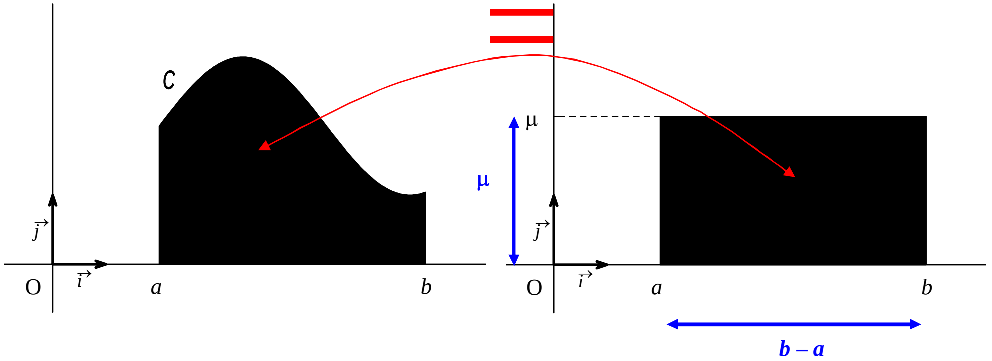
Remarque :

La notion de valeur moyenne d'une fonction généralise la notion de moyenne arithmétique pour des nombres.

2°) Interprétation graphique dans le cas d'une fonction continue positive

f est une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a\,;\,b]$ $(a<b)$.

$\mu \geqslant 0$



μ est la deuxième dimension d'un rectangle dont la première dimension est $b-a$ et qui a la même aire que D (domaine sous la courbe).

3°) Exemples

① Calculer la valeur moyenne de la fonction « carré » sur l'intervalle $[1\,;3]$.

On note μ cette valeur moyenne.

$$\begin{aligned}\mu&=\frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x\,.\\&=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(9-\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{26}{3}\\&=\frac{13}{3}\end{aligned}$$

② Calculer la valeur moyenne de la fonction « inverse » sur l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$.

On note μ cette valeur moyenne.

$$\begin{aligned}\mu&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,.\\&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\left[\ln x\right]_1^{\mathrm{e}}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}(\ln\mathrm{e}-\ln 1)\\&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}(1-0)\\&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\end{aligned}$$

4°) Propriété (« inégalité de la moyenne », encadrement de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle)

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ $(a<b)$.

m et M sont deux réels tels que $\forall x\in[a\,;b]\quad m\leqslant f(x)\leqslant M$.

On a : $m\leqslant\mu\leqslant M$.

Rappel de vocabulaire : m est un minorant de f sur $[a\,;\,b]$ et M est un majorant de f sur $[a\,;\,b]$.
On a : $m\leqslant\mu\leqslant M$.

Démonstration à savoir refaire :

On sait que : $\forall x \in [a\,;b] \quad \underbrace{m}_{u(x)} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{M}_{v(x)}$.

Donc par croissance de l'intégrale $(a<b)$:

$$\int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b v(x)\ \mathrm{d}x$$

Remarque sur l'intégrale d'une fonction constante :

$\int_a^b k\ \mathrm{d}x = [\ kx\ ]_a^b = kb - ka = k(b-a)$ (constante fois différence des bornes)

constante

Donc : $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$

$(:(b-a) \quad b-a>0)$

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}{b-a} \leqslant M$$

$$\boxed{m \leqslant \mu \leqslant M}$$

5°) Commentaire sur la valeur moyenne

- La valeur moyenne sert peu en mathématiques cette année. Elle sert en revanche davantage en physique.

- Elle est quand même intéressante pour l'inégalité de la moyenne.

IX. Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

1°) Problème

Écrire une primitive d'une fonction dont on ne connaît pas de primitive.
f est une fonction définie et continue sur un intervalle I.
$a \in \mathrm{I}$ fixé.

Pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on pose $\varphi(x) =$ intégrale de *f* de *a* à *x* ou $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ (repasser le *x* en rouge).

On va s'intéresser cette fonction. Que peut-on dire de φ ?
On ne cherche pas à la calculer.
On peut donner sa dérivée.

2°) Théorème (appelé parfois « théorème fondamental de l'analyse »)

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I.
$a \in \mathrm{I}$ fixé.
Pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on pose $\varphi(x) =$ intégrale de *f* de *a* à *x*.

$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ (repasser le *x* en rouge).

φ est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I} \quad \varphi'(x) = f(x)$.

Remarque sur l'écriture $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$:

Il y a deux variables : *x* et *t*.

t est la variable d'intégration (c'est une variable muette) : on peut dire d'une manière un peu abusive que « *t* prend toutes les valeurs de *a* à *x* ».

x est la variable de définition de la fonction φ.

3°) Démonstration

On note *F* une primitive de *f* sur I.

$\forall x \in \mathrm{I} \quad \varphi(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$

$\varphi(x) = F(x) - \underbrace{F(a)}_{\text{cte}}$

Par définition, *F* est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I} \quad F'(x) = f(x)$.

Donc φ est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I} \quad \varphi'(x) = F'(x) - 0$.

$\qquad = f(x)$

Comme $\varphi(a) = \int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, φ est la primitive de *f* sur I qui s'annule en *a*.

4°) Exemple

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt$$

$\varphi(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt$ = intégrale de 1 à x de la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$

On notera que t est la variable d'intégration.

Il ne faut pas chercher à calculer l'intégrale.

En effet, il n'est pas possible de déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$.

Nous allons nous intéresser cependant à la détermination de valeurs de φ.

$$\varphi(1) = \int_1^1 \frac{e^t}{1+t^2}\,dt = 0$$

Pour toute valeur de x différente de 1, il n'est pas possible de calculer $\varphi(x)$.

Si on désire néanmoins obtenir une valeur approchée de $\varphi(x)$ pour une valeur de x différente de 1, il faut utiliser la calculatrice (cf. paragraphe plus loin dans le cours).

Exemple :

$$\varphi(3) = \int_1^3 \frac{e^t}{1+t^2}\,dt$$

Sur calculatrice TI 83, on tape fnInt(e^T/(1+T^2),T,1,3).
On obtient l'affichage 3,093672831.

Ainsi, on a : $\varphi(3) = 3{,}09367283...$

Il est possible également de rentrer la fonction φ dans la calculatrice.

On tape Y1= fnInt(e^T/(1+T^2),T,1,X).
On peut alors obtenir un tableau de valeurs de la fonction φ.
On peut même obtenir la courbe représentative de la fonction φ (ça prend juste un peu de temps !).

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$ est continue.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

Donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = f(x)$

$$= \frac{e^x}{1+x^2}$$

Le 18 mars 2021

Écrire la primitive F de la fonction $f : t \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$ qui s'annule en 0 (j'avais écrit 1 initialement).

On utilise une intégrale.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \text{ soit } F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt$$

F(1) ?

calculatrice

La calculatrice effectue un calcul approché.

On peut démontrer que $F(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$ (qu'on ne peut pas trouver) et que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers plus l'infini.

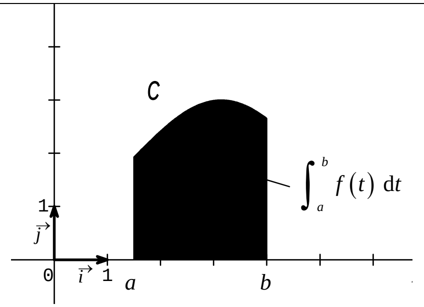
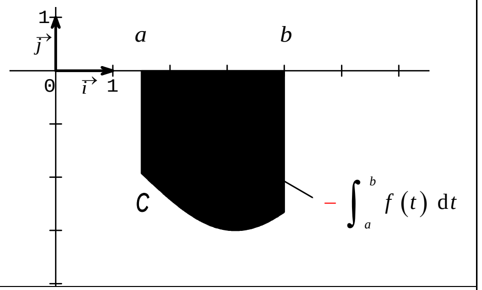
sens de variation de F ?

$F' = ...$?

X. Application des intégrales aux calculs d'aires

1°) Aire associée à la courbe d'une fonction de signe constant

$f : [a\ ;\ b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$) continue de signe constant.

$f \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$	$f \leqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$
	
Aire de $\mathcal{D} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en u.a. $\mathcal{D}\ \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$	Aire de $\mathcal{D} = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en u.a. $\mathcal{D}\ \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ f(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}$

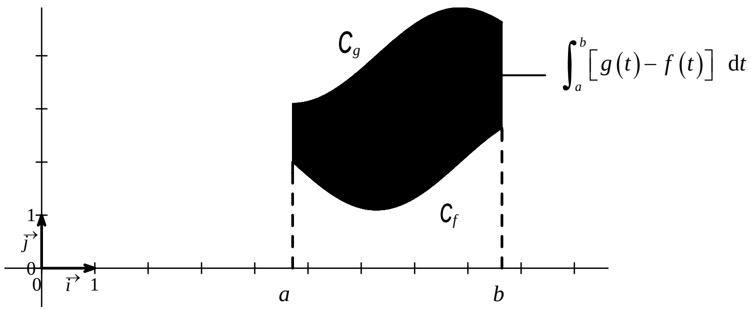
2°) Aire du domaine compris entre deux courbes

$a < b$

$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue.

$g : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue.

$\forall x \in [a;b] \quad f(x) \leqslant g(x)$



Aire de $\mathcal{D} = \int_a^b [g(t) - f(t)]\,\mathrm{d}t$ en u.a.

$\mathcal{D}\ \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{cases}$

3°) Unité d'aire dans un repère orthogonal

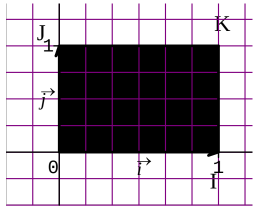
● Définition

On se place dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a alors $O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$.

On considère les points $I\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$, $J\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$, $K\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$.

Par définition, **l'unité d'aire** associée au repère (en abrégé u. a.) est l'aire du rectangle OIKJ.



On retiendra : $\boxed{\text{u.a.} = \text{aire du rectangle OIKJ}}$.

Exemple :

Avec les notations précédentes, on suppose que $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 3$ cm.

Dans ce cas, on a :

$\boxed{1 \text{ u. a.} = \text{aire du rectangle OIJK} = OI \times OJ = (2\text{ cm}) \times (3\text{ cm}) = 6\text{ cm}^2}$

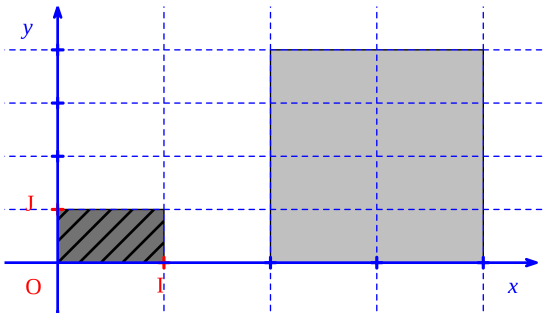
● Application pratique importante

Exemple :

Dans le cas de l'exemple précédent on sait que 1 u. a. = 6 cm^2 .

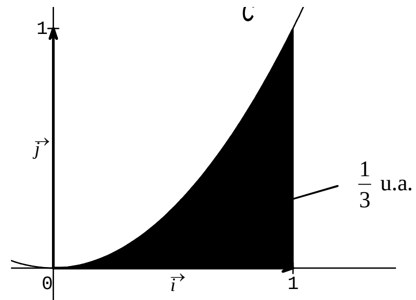
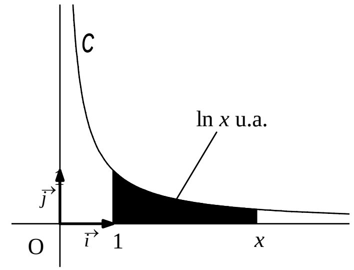
Pour obtenir la mesure en cm^2 de l'aire $\mathcal{A}$ d'un domaine $\mathcal{D}$, il faudra multiplier le résultat en unité d'aire par 6.
Supposons que $\mathcal{A} = 4$ u. a.. Alors $\mathcal{A} = 4 \times \left(6 \text{ cm}^2\right) = 24 \text{ cm}^2$.

Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J) orthogonal, le rectangle hachuré (rouge) a pour comme dimensions 1 sur 1. Il s'agit du rectangle « unité » qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a..
L'aire du rectangle gris est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle gris est donc égale à 8 u.a..
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aires en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

4°) Exemples

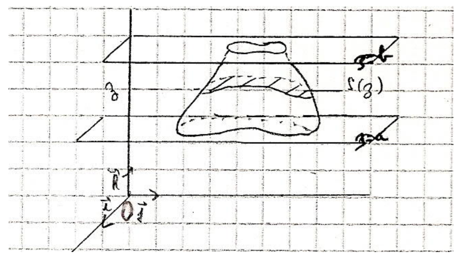
Quadrature de la parabole	Quadrature de l'hyperbole
$f : x \mapsto x^2$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$
	
f est continue et positive sur [0 ; 1]. Aire de $\mathcal{D} = \int_0^1 t^2 \, \text{d}t$ $= \left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^1$ $= \dfrac{1}{3}$ u. a. On ne peut évident pas trouver cette valeur graphiquement.	$x > 1$ f est continue et positive sur [1 ; x]. Aire de $\mathcal{D} = \int_1^x \dfrac{1}{t} \, \text{d}t$ $= [\ \ln t\ ]_1^x$ $= \ln x - \ln 1$ $= \ln x$ u. a.

XI. Application des intégrales aux calculs de volumes

1°) Théorème (admis sans démonstration)

● Formule de calcul par découpage en tranches par des plans perpendiculaires à l'axe des cotes

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère un solide délimité par les plans de cotes a et b ($a < b$).



On note $S(z)$ l'aire de la section à la cote z pour $a \leqslant z \leqslant b$.
(Le solide est limité par les plans d'équations $z = a$ et $z = b$.)

On suppose que la fonction $z \mapsto S(z)$ est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Le volume du solide est donné par $\mathrm{V} = \int_a^b S(z)\ \mathrm{d}z$ (en unité de volume).

Idée : On découpe le solide en minces tranches presque cylindriques (cylindres de hauteur dz, infinitésimale).

Méthode pour calculer le volume d'un solide avec la formule par découpage en tranches par des plans perpendiculaires à l'axe des cotes

- On trouve les bornes de l'intégrale.
- On trouve $S(z)$ (on verra en exercices comment le calculer).
- On calcule l'intégrale.

● Cette formule reste valable pour un découpage en tranches par des plans perpendiculaires à l'axe des abscisses.

On note $S(x)$ l'aire de la section à l'abscisse x pour $a \leqslant x \leqslant b$.
(Le solide est limité par les plans d'équations $x = a$ et $x = b$.)

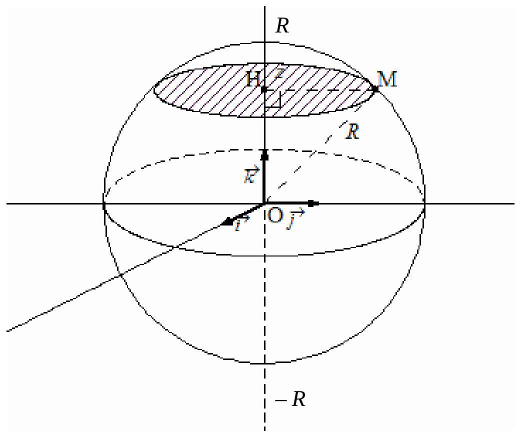
Volume du solide $= \int_a^b S(x)\ \mathrm{d}x$ (en u.v.).

● Cette formule reste valable pour un découpage en tranches par des plans perpendiculaires à l'axe des ordonnées.

2°) Volume d'une boule

On se place toujours dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère une boule de centre O et de rayon *R*.



Boule | de centre O
de rayon R $(R > 0)$

Pour calculer le volume, on peut utiliser un découpage par tranches orthogonales à l'un des axes.

On va effectuer un découpage par tranches horizontales.

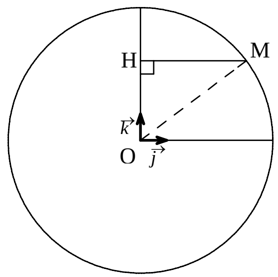
La sphère est limitée par les plans d'équations z=R et z=-R.

On applique la formule avec

$a = -R$
$b = R$

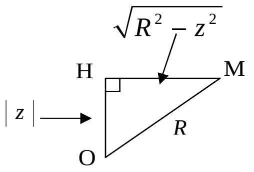
Calculons $S(z)$ (la section est un disque).

Aire d'un disque de rayon $r > 0$: $\pi\, r^2$



$\mathrm{HM}^2 = R^2 - |\,z\,|^2$

Donc $\mathrm{HM}^2 = R^2 - z^2$



$S(z) =$ aire du disque de centre H et de rayon HM

$= \pi \times \mathrm{HM}^2$

$= \pi \times \left(\mathrm{R}^2 - z^2\right)$

$$V = \int_{-R}^{R} S(z)\ \mathrm{dz}$$

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - z^2\right)\ \mathrm{dz}$$

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - z^2\right)\ \mathrm{dz}$$

Utilisation de la linéarité de l'intégrale

(on utilise le fait que R est une constante)

$$V = \pi\left[R^2 \times z - \frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$V = \pi\left[\left(R^2 \times R - \frac{R^3}{3}\right) - \left(R^2 \times (-R) - \frac{(-R)^3}{3}\right)\right]$$

$$V = \pi\left[\frac{2R^3}{3} - \left(-\frac{2R^3}{3}\right)\right]$$

$$V = \pi \frac{4R^3}{3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

On peut aussi calculer le volume d'une demi-boule et multiplier le résultat par 2.

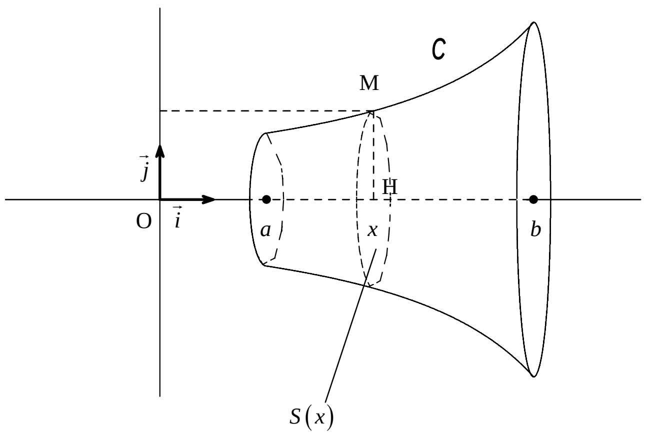
Par le même calcul, on obtient aisément le volume d'une calotte sphérique.

(N.B. : aire de la sphère $A = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} = 4\pi R^2$)

3°) Volume d'un solide de révolution (méthode des disques)

f est une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$.

$\mathcal{C}$: représentation graphique de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$



On considère le solide engendré par la rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe des abscisses.

$S(x) =$ aire du disque de centre H et de rayon $\mathrm{HM} = f(x)$

$= \pi \times \left[f(x)\right]^2$

$$\mathrm{V} = \int_a^b S(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \pi \times \left[f(x)\right]^2\ \mathrm{d}x = \pi \times \int_a^b \left[f(x)\right]^2\ \mathrm{d}x$$

le π « passe » devant

Le volume du solide est donné par $\mathbf{V} = \pi \times \int_a^b \left[f(x)\right]^2\ \mathbf{d}x$.

(Cette formule est parfois appelée **« formule des disques »**).

N.B : La boule, le cylindre droit, le cône de révolution sont des solides de révolution.

4°) Volume d'un cylindre

On a la formule quelconque valable pour un cylindre droit ou oblique : $\boxed{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}$.

XII. Calcul approché d'une intégrale

1°) Méthode des rectangles

On se place dans le cas d'une fonction *f* positive ou nulle et continue sur un intervalle [*a* ; *b*].

On calcule la somme des aires des « rectangles inférieurs » et la somme des aires des « rectangles supérieurs ».

Lorsque *f* est monotone, cela fournit un encadrement de l'aire, et donc de l'intégrale de *f* sur l'intervalle [*a* ; *b*].

Cette méthode se prête particulièrement bien à la programmation (algorithme avec une boucle « Pour » aisé à programmer : voir exercices).

Le 29-6-2016

Cette méthode a déjà été présentée dans le paragraphe **II. 1°)** (méthode de Pascal). Le paragraphe **XIII.** revient plus en détail sur cette méthode.

2°) Autres méthodes (voir exercices)

On peut mentionner par exemple la « méthode des trapèzes » accessible en terminale.

3°) Utilisation de la calculatrice et de logiciels

① calculatrices

Les calculatrices « simples » donnent une valeur approchée.

② logiciels de calcul formel

L'usage d'un tel logiciel peut être très intéressant : il permet de trouver la valeur exacte de l'intégrale dans de nombreux cas.

Par exemple, pour $\int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$, on obtiendra la valeur exacte $\mathrm{e}-1$, pour $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$, on obtiendra la valeur exacte ln 2.

XCas calcule une intégrale sous forme exacte lorsque c'est possible.

③ logiciels de géométrie dynamique

Calcul d'intégrales avec la calculatrice :

Calculatrice $\int_1^2 \mathrm{Y}_1 \, \mathrm{dX}$.

1) Rentrer Y1

2°) Y1 choix $\boxed{\text{alpha}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (f4)

Avec graphique : TI-83 Plus.fr ou TI-83 Premium-CE

$\boxed{f(x)}$ $\boxed{\text{math}}$ 9 : intégrFonct ou $\boxed{f(x)}$

Exemple :

Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$.

Il n'y a pas besoin de calculer la primitive de la fonction.
On rentre directement la fonction originale. La calculatrice calcule l'intégrale au moyen d'un programme intégré, sans calculer la primitive.

● Avec la TI 82 Stats.fr ou TI 83

1ère façon :

$\boxed{\text{math}}$ math 9 : fonctIntegr(X^2, X, 0,1)

ou

$\boxed{\text{MATH}}$ MATH 9 : fnInt(X^2, X, 0,1)

On trouve 0,3333333333 c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ ce qui est « logique ».

2e façon :

$\boxed{\text{Y =}}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{\text{GRAPH}}$ $\boxed{\text{2}^{\text{nd}}}$ $\boxed{\text{Calc}}$ $\boxed{7}$ (déplacer le curseur sur 0 puis $\boxed{\text{Enter}}$ puis sur 1 $\boxed{\text{Enter}}$).

● Avec la TI 84 plus

fnint(X^2, X, 0,1)

● Avec la CASIO GRAPH 35 +

Dans le mode RUN, utiliser la fonction ∫ (que l'on trouve en faisant OPTN, F4 (CALC), F4 (∫ dx). Elle s'utilise comme ceci : ∫ (<fonction>,<borne inférieure>,<borne supérieure>).

Taper l'expression de la fonction taper la borne inférieure c'est-à-dire *a* (ici 0) borne supérieure c'est-à-dire 1.

XIII. Méthode des rectangles

1°) Cadre

• On se place dans le cas d'une fonction f continue, positive et monotone sur $[a, b]$.

• On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

• Dans la suite, on va supposer que f est croissante sur $[a, b]$.

• On s'intéresse à l'aire $\mathcal{A}$ sous la courbe $\mathcal{C}$.

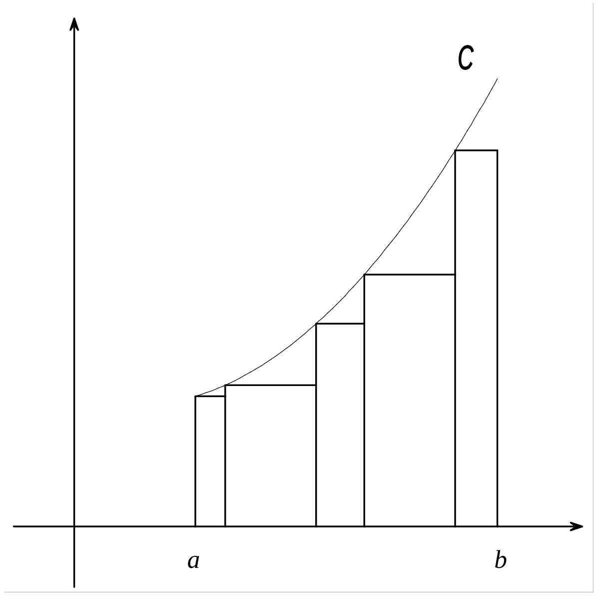
2°) Principe de la méthode des rectangles

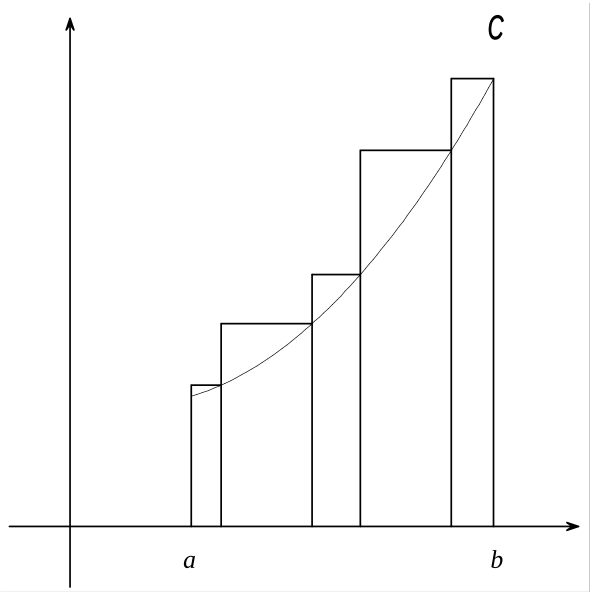
Elle consiste à encadrer l'aire par des sommes d'aires de rectangles au-dessous et au-dessus de la courbe.

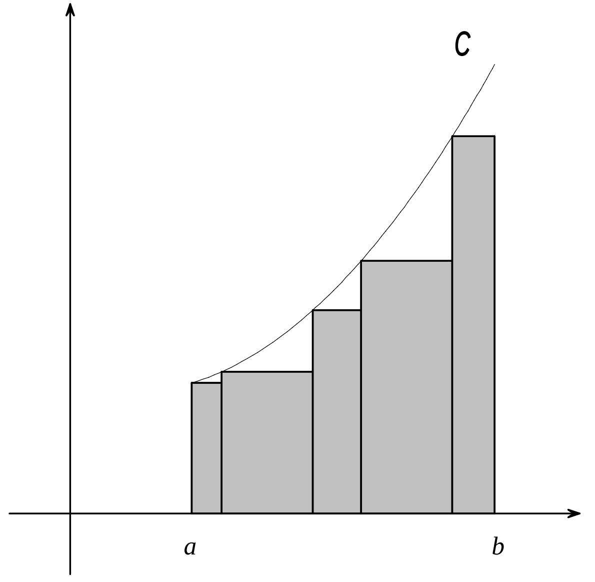
Elle est illustrée sur les deux séries de graphiques suivants où l'on considère 5 rectangles au-dessous et 5 rectangles au-dessus.

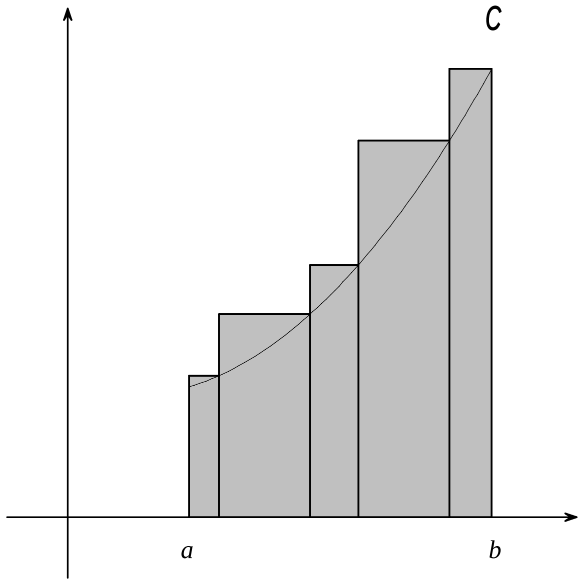
Sur la 1ère série, on a considéré des rectangles de bases différentes.

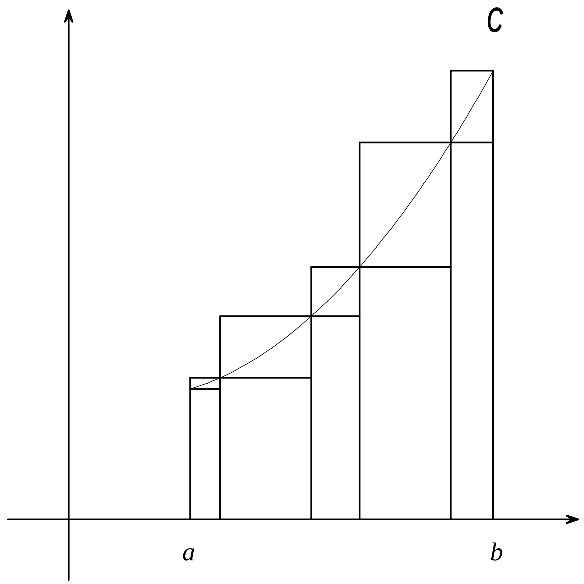
Sur la 2e série, on a considéré des rectangles de même base. On a ainsi créé une subdivision régulière de l'intervalle [a ; b].



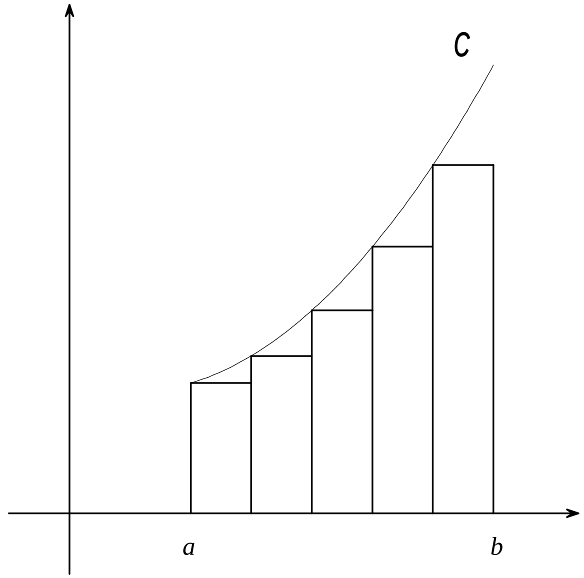


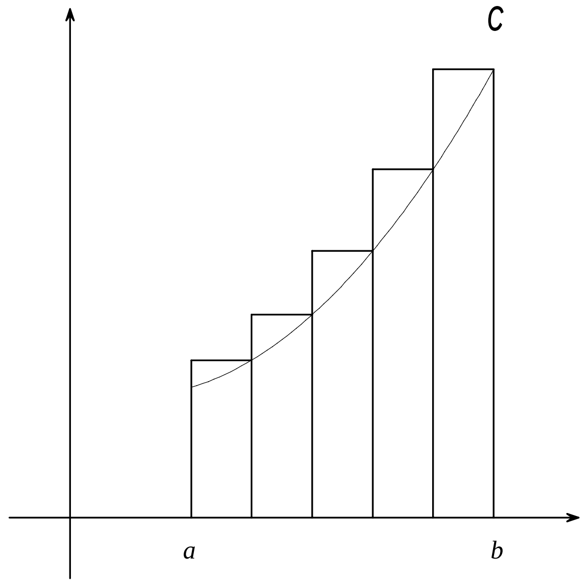


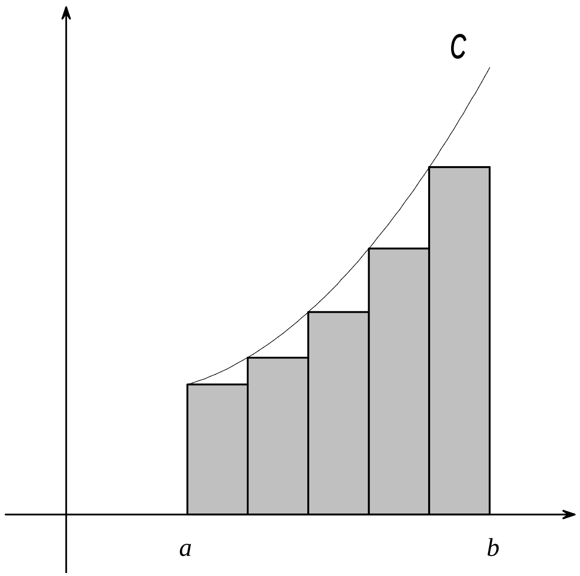


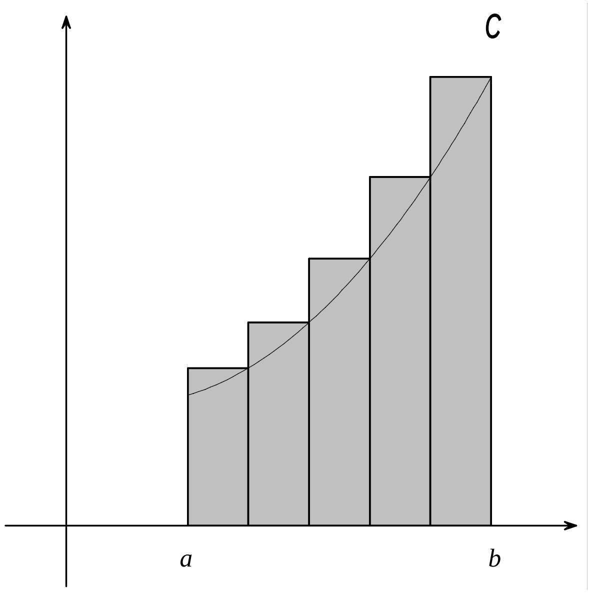


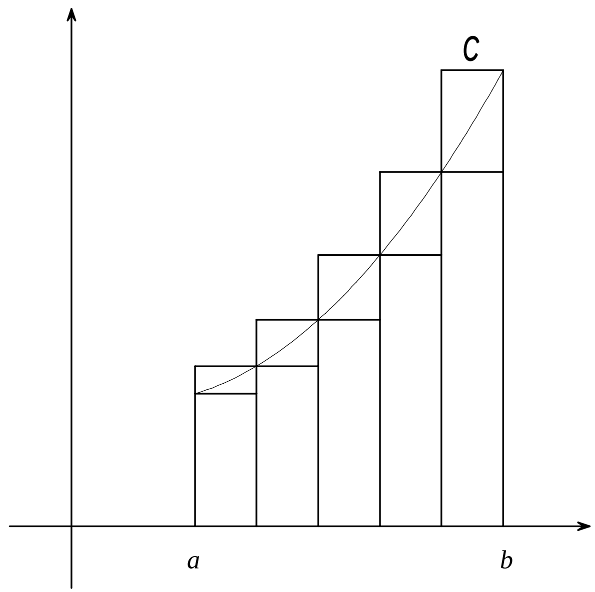
2^e série :











Pour des raisons évidentes, on privilégie les rectangles de même base.

La méthode des rectangles consiste à subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur.
On conçoit aisément que plus n est grand, plus la somme des aires des rectangles au-dessus ou au-dessous est proche de l'aire sous la courbe.

3°) Application pratique

La somme des aires de rectangles peut se calculer aisément avec la calculatrice (programme ou fonction somme de la calculatrice). Cela point est explicité dans le paragraphe 5°).

4°) Résultat général

Propriété :

Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est encadrée par $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ et $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

Commentaire :

Dans le cas où f est positive, il s'agit d'un encadrement de l'aire sous la courbe par deux sommes de n termes correspondant à des aires de n rectangles (autrement dit, on effectue une subdivision régulière de l'intervalle $[a\,;b]$ en n intervalles).

Dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $\left[a\,;b\right]$:

$\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ désigne la somme des aires des rectangles « inférieurs » ;

$\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ désigne la somme des aires des rectangles « supérieurs ».

On a : $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\leqslant \mathcal{A} \leqslant \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

Dans le cas où f est décroissante sur l'intervalle $\left[a\,;b\right]$:

$\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ désigne la somme des aires des rectangles « supérieurs » ;

$\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ désigne la somme des aires des rectangles « inférieurs ».

On a : $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\leqslant \mathcal{A} \leqslant \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

On a : $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)-\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)=\dfrac{b-a}{n}\left[f\left(b\right)-f\left(a\right)\right]$.

Donc dans les deux cas ($f\geqslant 0$ et $f\leqslant 0$), l'amplitude de l'encadrement de $\mathcal{A}$ est égale à $\dfrac{b-a}{n}\left|\,f\left(b\right)-f\left(a\right)\right|$.

Ce résultat est intéressant à connaître. IL montre que plus n est grand, plus l'amplitude de l'encadrement est faible.

Dans la première somme, le k sert à désigner l'abscisse de chaque point de la courbe.

Dans le cas d'une fonction positive, pour un découpage en 4 rectangles.
Faire une graphique avec f croissante.

Somme des aires des rectangles « inférieurs ».

$$\frac{b-a}{4}\times f\left(a\right)+\frac{b-a}{4}\times f\left(a+\frac{b-a}{4}\right)+\frac{b-a}{4}\times f\left(a+2\times\frac{b-a}{4}\right)+\frac{b-a}{4}\times f\left(a+3\times\frac{b-a}{4}\right)$$

Somme des aires des rectangles « supérieurs » :

$$\frac{b-a}{4}\times f\left(a+\frac{b-a}{4}\right)+\frac{b-a}{4}\times f\left(a+2\times\frac{b-a}{4}\right)+\frac{b-a}{4}\times f\left(a+3\times\frac{b-a}{4}\right)+\frac{b-a}{4}\times f\left(b\right)$$

Le 6 juin 2016

Clara Oury groupé avec Théo Spriet

Nous nous interrogeons sur ce que représente « k » dans **XIII. Méthode des rectangles** 4°) dans la formule

$\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

→ Cela représente un nombre de traits ou un nombre de rectangles ?

Démonstration :

Remarque :

On conçoit aisément que plus n est grand, plus la somme est proche de l'aire sous la courbe.

5°) Algorithme

On peut aisément calculer les sommes par un algorithme.

Entrées :
Saisir les réels a et b
Saisir l'entier naturel n

Initialisations :
L prend la valeur $\dfrac{b-a}{n}$
x prend la valeur a
m prend la valeur 0
p prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 0 à $n-1$ **Faire**
    m prend la valeur $m+L\times f(x)$
    x prend la valeur $x+L$
    p prend la valeur $p+L\times f(x)$
FinPour

Sortie :
Afficher m et p

Les formules $\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ et $\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ définissent des suites qu'il est possible d'étudier.