TS

La continuité des fonctions (1)
Notions générales
Approche graphique

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à une nouvelle famille de fonctions, très importante en analyse, dont l'intérêt n'apparaîtra que dans le chapitre suivant.

I. Notion intuitive de continuité

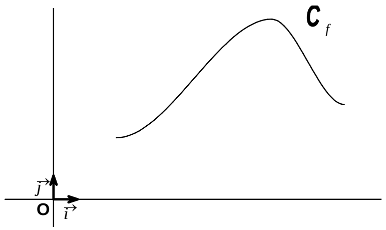
La notion est explicitée dans le cadre graphique.

1°) « Définition »

On dit qu'une fonction définie sur un intervalle I est *continue* sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut tracer la courbe sans lever le crayon de la feuille).

Une définition plus mathématique sera donnée dans l'enseignement supérieur.
Le programme demande de se limiter à une approche intuitive et « naïve ».
Cette année, on se contentera donc de cette « définition ». Du coup, toutes les propriétés des fonctions continues seront admises sans démonstration.

2°) Illustration graphique permettant de comprendre l'idée de continuité

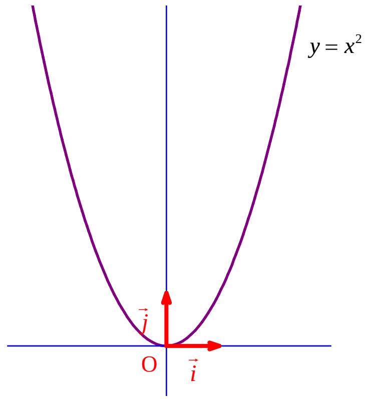


La courbe est tracée sans lever le crayon sur tout l'intervalle.
En gros, il n'y a pas d'arrêt ni de redémarrage.
On dira que la courbe est continue ou que le tracé est « continu ».
Le terme de continu sera cependant réservé aux fonctions.

II. Exemples

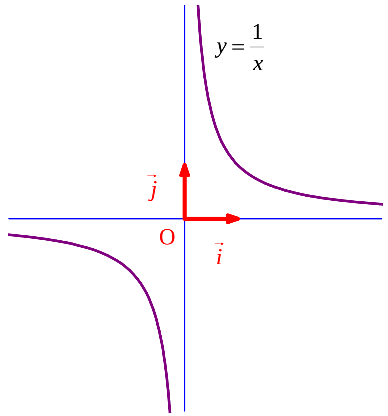
1°) Exemple 1

La fonction « carré » est continue sur $\mathbb{R}$.



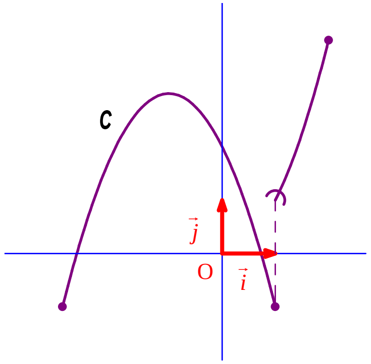
2°) Exemple 2

La fonction « inverse » est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
Sa courbe représentative est constituée de deux morceaux (on parle de « branches ») ; chacun d'eux peut être tracé sans lever le crayon ; il y a pour cela deux tracés séparés.



3°) Exemple 3

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;2]$.



On a un point de non-continuité (rupture).
La courbe présente une rupture au niveau du point d'abscisse 1.

La fonction f n'est pas continue sur l'intervalle $[-3\,;2]$ (elle présente une discontinuité en 1).

III. Continuité des fonctions de référence

1°) Propriété (admise sans démonstration)

Les fonctions affines, « carré », « inverse », « racine carrée », « cube », « valeur absolue », « cosinus », « sinus » sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

2°) Autres fonctions

La fonction $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

IV. Lien entre continuité et dérivabilité

1°) Propriété (admise sans démonstration)

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

2°) Commentaires

• La propriété précédente exprime que la dérivabilité entraîne la continuité.
En revanche, la réciproque de cette propriété est fausse : la continuité n'entraîne pas la dérivabilité (si une fonction est continue sur un intervalle, elle n'est pas forcément dérivable sur cet intervalle).
Par exemple :

- la fonction « valeur absolue » est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.
- la fonction « racine carrée » est continue sur $[0\,;+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0.

• La contraposée de la propriété est vraie c'est-à-dire que la non-continuité entraîne la non-dérivabilité (si une fonction n'est pas continue sur un intervalle, alors elle n'est pas dérivable sur cet intervalle).

3°) Corollaire

• Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

• Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

V. Opérations sur les fonctions continues

1°) Propriété 1 (admise sans démonstration)

• La somme de deux fonctions continues sur I est continue sur I.

• Le produit de deux fonctions continues sur I est continu sur I.

• Le quotient d'une fonction continue sur I par une fonction continue sur I, qui ne s'annule pas sur I, est continu sur I.

2°) Propriété 2 (admise sans démonstration)

La composée de deux fonctions continues est continue.

3°) Point-méthode : comment justifier la continuité d'une fonction sur un intervalle

• On regarde si f est une fonction polynôme.
• On regarde si f est une fonction rationnelle.
• On applique les règles d'opérations.

VI. Un exemple de fonction non continue : la fonction partie entière

1°) Définition de la partie entière d'un réel

Pour tout réel x, il existe un unique <u>entier relatif</u> n tel que l'on ait $n \leqslant x < n+1$.
large strict

Cet entier relatif n est appelé **la partie entière** de x.
On le note $\mathrm{E}(x)$.
On a donc : $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$.

2°) Exemples

- $\mathrm{E}(5,7)=5$ car $5 \leqslant 5,7 < 6$ (la partie entière d'un réel positif correspond à sa troncature* à l'unité)
- $\mathrm{E}(-3,6)=-4$ car $-4 \leqslant -3,6 < -3$
- $\mathrm{E}(-2)=-2$ car $-2 \leqslant -2 < -1$ **
- $\mathrm{E}(\pi)=3$ car $3 \leqslant \pi < 4$
- $\mathrm{E}(n)=n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ car $n \leqslant n < n+1$

* La troncature d'un décimal consiste à couper les décimales du nombre à partir d'un rang donné ; la troncature à l'unité consiste à laisser tomber tous les chiffres après la virgule.
Il faut bien noter que l'expression « partie entière » est employée en 6^{e} pour un nombre décimal positif pour désigner le nombre formé par les chiffres avant la virgule (partie avant la virgule). On emploie également à cette occasion l'expression « partie décimale ».
Le sens coïncide avec évidemment avec celui donné dans ce cours (mais uniquement pour les nombres décimaux positifs).

** Il faut bien se souvenir de la signification pas évidente quand on le voit pour la première fois du symbole $\leqslant$ (« inférieur ou égal »). Par exemple, on peut bien écrire $2 \leqslant 3$ (même si 2 n'est pas égal à 3).

Autre formulation :

La partie entière d'un réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

3°) Caractérisation de la partie entière d'un réel

$$\mathrm{E}(x)=n \text{ signifie } \begin{cases} \mathrm{C}_1 : n \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{C}_2 : n \leqslant x < n+1 \end{cases}$$

4°) Sur la calculatrice

• Sur calculatrice TI :

Appuyer sur la touche $\boxed{\text{math}}$, sélectionner NUM puis choisir 5 : Int([« Int » pour « integer » qui veut dire entier en anglais] ou partEnt([abréviation de partie entière].

Attention, la commande iPart que l'on obtient en choisissant 3 ne donne pas la partie entière mais la troncature à l'unité du nombre ; autrement dit : iPart($\neq$ int (par exemple, avec – 3,5 : $\mathrm{iPart}(-3,5)=-3$ alors que la partie entière de – 3,5 est égale à – 4).
La troncature à l'unité est égale à la partie entière uniquement dans le cas où le nombre est positif ou si c'est un entier négatif.
En revanche, elle n'est pas égale à la partie entière pour un réel négatif non décimal.

TI-83 Premium CE

Aller dans $\boxed{\text{math}}$, sélectionner NBRE puis choisir 5 : partEnt

Attention, le choix 3 : ent(correspond à la troncature à l'unité). On ne l'utilise pas.

• Sur calculatrice CASIO : $\boxed{\text{OPTN}}$ puis $\boxed{\text{NUM}}$ (la touche $\boxed{\text{F5}}$) puis $\boxed{\text{Intg}}$ (la touche $\boxed{\text{F5}}$).

5°) Propriété importante

• Énoncé

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \mathrm{E}(x+n)=\mathrm{E}(x)+n$$

• Démonstration

Hypothèses

H$_1$: $x \in \mathbb{R}$
H$_2$: $n \in \mathbb{Z}$
H$_3$: $p=\mathrm{E}(x)$

But : démontrer que $\mathrm{E}(x+n)=p+n$.

H$_3$ donne $p \leqslant x < p+1$

$+\,n$

$p+n \leqslant x+n < (p+n)+1$

Le nombre $p+n$ vérifie les deux conditions :
C$_1$: $p+n$ est un entier relatif (car $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$)
C$_2$: $p+n \leqslant x+n < (p+n)+1$
D'après la caractérisation de la partie entière, on en déduit que $\mathrm{E}(x+n)=p+n$.

Donc $\mathrm{E}(x+n)=\mathrm{E}(x)+n$.

• ⚠ $\mathrm{E}(1,2+3,9)=\mathrm{E}(5,1)=5$

$\mathrm{E}(1,2)+\mathrm{E}(3,9)=1+3=4$ $\neq$

Il faut que $n\in\mathbb{Z}$.

Par exemple, $\mathrm{E}(x+4,5)$ ne peut être simplifié.

6°) La fonction « partie entière »

• Définition

On appelle **fonction « partie entière »** la fonction

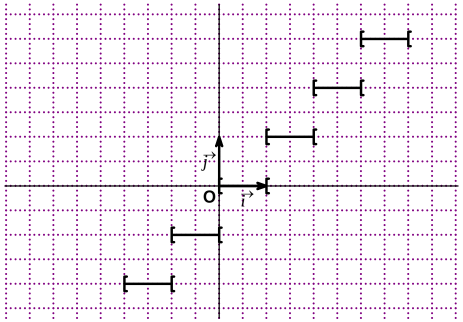
$$\begin{aligned} \mathrm{E}:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\ (\mathbb{Z}) \\ x &\mapsto \mathrm{E}(x) \end{aligned}$$

La fonction « partie entière » est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

• Représentation graphique

$\forall x\in[0\,;1[\quad \mathrm{E}(x)=0$

$\forall x\in[1\,;2[\quad \mathrm{E}(x)=1$



La représentation graphique est constituée de segments de droites (semi-fermés à gauche, semi-ouverts à droite). On observera les points d'arrêt.

f est une fonction **constante par intervalles** ou **fonction en escalier**.

Attention, la représentation graphique de la fonction « partie entière » observée à l'écran d'une calculatrice graphique présente des segments verticaux : la calculatrice relie, à tort, les points de la représentation graphique où la fonction « partie entière » présente une discontinuité.

Pour enlever les petits « murs »

- Pour les calculatrices TI

Appuyer sur la touche $\boxed{\text{mode}}$, puis modifier « Connected » en « Dot » (qui signifie « point » en anglais) ou « Relié » en « Non relié ».

- Pour les calculatrices CASIO

Dans le menu GRAPH, $\boxed{\text{2de}}$ Set up D-Type : Plot

Dans ce cas, la calculatrice ne place que les points qu'elle a « calculés », comme on s'en rend compte en lui demandant de tracer la courbe représentative de la fonction « carré ».
La fonction « partie entière » est un exemple important de fonction non continue.

D'autres exemples de fonctions non continues (en particulier issues de situations concrètes) seront donnés en exercices.

- Sur Geogebra

La partie entière est notée floor( ).

VI. Un autre exemple de fonction non continue : la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire qui prend un nombre fini de valeurs.

On note F_{X} sa fonction de répartition.

Il s'agit d'une fonction constante par intervalles.

Sa représentation graphique est constituée de deux demi-droites et de segments.
Il n'y a donc pas de moins d'arrêt « en – ∞ » et « en + ∞ ».

Historique :

Les fonctions continues constituent une classe de fonctions, très importante en analyse.

Historiquement, la notion de fonction continue est apparue au début du XIX^{e} siècle (on croyait alors que toutes les fonctions étaient continues).

La notion a été dégagée par Louis-Augustin Cauchy, mathématicien français, entre autre professeur à l'École Polytechnique et auteur d'un livre d'analyse (*Cours d'analyse*).

Il faut citer également le nom du mathématicien BOLZANO qui a trouvé et démontré le théorème des valeurs intermédiaires qui sera étudié dans le chapitre suivant.