TS

Les primitives

I. Notion de primitive

1°) Définition (rappel)

f est une fonction définie sur un intervalle I.

On dit qu'une fonction F définie sur I est <u>une</u> primitive de f sur I lorsque :
① F est dérivable sur I ;
② $\forall x \in \mathrm{I} \quad F'(x) = f(x)$.

2°) Exemples

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 3x+5$

f admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + 5x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

② $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

On ne sait pas donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (fonction Arctangente).

③ $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto \ln x$

④ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto gt$

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$t \mapsto \dfrac{1}{2}gt^2$

3°) Théorème de Darboux (mathématicien du XIX[e] siècle)

Ce théorème est admis sans démonstration.

Toute fonction définie et continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Toutes les fonctions n'admettent pas en général de primitives.
Certaines fonctions ne sont pas dérivables ; certaines fonctions n'admettent pas de primitive mais lorsque tout se passe bien :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, bend left, "\text{Dériver}"] & & F' = f \arrow[ll, bend left, "\text{Chercher une primitive}"] \end{tikzcd}$$

« Primitiver »

II. Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

1°) Remarque préliminaire

Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, alors la fonction $G : x \mapsto F(x)+k \quad (k \in \mathbb{R})$ est aussi une primitive de f.

2°) Réciproquement

Supposons que f admette deux primitives F et G sur un intervalle I.

Dans ce cas, $\forall x \in \mathrm{I} \quad F'(x) = G'(x) = f(x)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{I} \quad G'(x) - F'(x) = 0$
soit $\forall x \in \mathrm{I} \quad (G-F)'(x) = 0$.

Or I est un intervalle.

Une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle.

On en déduit que la fonction $G-F$ est constante sur l'intervalle I.

Donc il existe un réel k tel que $\forall x \in \mathrm{I} \quad (G-F)(x) = k$ soit $\forall x \in \mathrm{I} \quad G(x) = F(x) + k$.

3°) Théorème

Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions
$G : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \quad (k \in \mathbb{R})$.
$x \mapsto F(x)+k$

III. Linéarité

1°) Propriété

f et g sont deux fonctions définies sur un même intervalle I admettant des primitives sur I.
Si F est une primitive f sur I et G est une primitive g, alors pour tous réels α et β la fonction $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$ sur I.

2°) Démonstration (ROC)

La fonction $\alpha F+\beta G$ est dérivable sur I (règle sur les opérations algébriques sur les dérivées) et $(\alpha F+\beta G)'=\alpha F'+\beta G'=\alpha f+\beta g$.

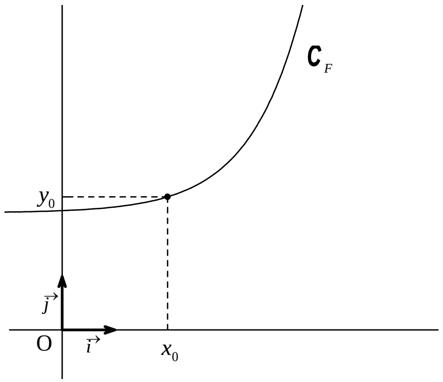
3°) Attention au produit

$F\times G$ n'est pas une primitive de $f\times g$ sur I.

IV. Primitive prenant une valeur donnée

1°) Théorème

f est une fonction définie sur un même intervalle I admettant des primitives sur cet intervalle.
x_0 est un réel fixé dans I.
y_0 est un réel fixé.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.



2°) Démonstration (ROC)

Par hypothèse, f admet des primitives sur I.
On note G une primitive de f sur I.

Les primitives de f sur I sont les fonctions $F : \mathrm{I}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto G(x)+k$ $(k\in\mathbb{R})$.

$$F(x_0)=y_0 \Leftrightarrow G(x_0)+k=y_0$$
$$\Leftrightarrow k=y_0-G(x_0)$$

f admet donc une unique primitive F sur I telle que $F(x_0)=y_0$.
F est définie par $F(x)=F(x_0)+y_0-G(x_0)$.

3°) Exercice

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x^2-3x+1$$

Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=5$.

Ou :

Déterminer la primitive F de f qui prend la valeur 5 en 0.

Il convient d'expliquer l'expression « F prend la valeur 5 en 0 ». Cette expression signifie que $F(0)=5$. Le mot « valeur » se réfère à la valeur de l'image de 0 par F (valeur de la fonction en 0).

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+x+k$ $(k\in\mathbb{R})$.

$$F(0)=5 \Leftrightarrow \frac{0^3}{3}-\frac{3}{2}\times 0^2+0+k=5$$
$$\Leftrightarrow k=5$$

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=5$ est définie par $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+x+5$.

V. Primitives usuelles

1°) Primitives des fonctions de référence

Fonction	Primitive	Intervalle(s) de validité
$a \quad (a \in \mathbb{R})$	$ax+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{x^3}{3}+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+k \ (k \in \mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+k \ (k \in \mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert$	$]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k \ (k \in \mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$
$\cos x$	$\sin x+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b) \ (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b) \ (a \neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\frac{1}{\sqrt{ax+b}} \ (a \neq 0)$	$\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+k \ (k \in \mathbb{R})$	$D_f \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+k \ (k \in \mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$
e^x	$e^x+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$e^{ax} \ (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}e^{ax}+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha=e^{\alpha \ln x} \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+k \ (k \in \mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{ax+b} \ (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b \rvert+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\left]-\infty\,;-\frac{b}{a}\right[\cup \left]-\frac{b}{a}\,;+\infty\right[$
$\tan x$	$-\ln\lvert \cos x \rvert+k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Quelques commentaires :

● Quelle est la différence entre les lignes 4 et 17 : $x^n \ (n \in \mathbb{N})$ et $x^\alpha=e^{\alpha \ln x} \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$?

On a l'impression que ce sont les mêmes formules.

La formule est effectivement la même.

Dans la formule de la ligne 4, l'exposant est un entier naturel.

Dans la formule de la ligne 17, l'exposant est un réel différent de – 1.

Cette formule est intéressante lorsque l'on a des exposants non entiers naturels (en particulier, fractionnaires).

● On pourrait rajouter la ligne suivante.

$\frac{1}{x^\alpha}$	$-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}+k \ (k \in \mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$

● Justification de deux lignes :

$$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$F(x)=\frac{1}{n+1}\times x^{n+1}$$

$$F'(x)=\frac{1}{n+1}\times(n+1)x^n$$

$$F'(x)=x^n$$

$$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$$

$$F(x)=-\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{x^{n-1}}$$

$$F'(x)=-\frac{1}{n-1}\times\left(-\frac{n-1}{x^n}\right)$$ [Formule $\left(\frac{1}{x^p}\right)'=-\frac{p}{x^{p+1}}$]

$$F'(x)=\frac{1}{x^n}$$

2°) Primitives déduites des règles de dérivation

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Primitive
$u'+v'$	$u+v+k \ (k\in\mathbb{R})$
$au' \ (a\in\mathbb{R})$	$au+k \ (k\in\mathbb{R})$
$u'v+uv'$	$uv+k \ (k\in\mathbb{R})$
uu'	$\dfrac{u^2}{2}+k \ (k\in\mathbb{R})$
$u'u^n \quad (n\in\mathbb{N})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+k \ (k\in\mathbb{R})$
$\dfrac{u'}{u^2} \quad (u\neq 0$ sur I)	$-\dfrac{1}{u}+k \ (k\in\mathbb{R})$
$\dfrac{u'}{u^n} \quad (u\neq 0$ sur I ; $n\geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+k \ (k\in\mathbb{R})$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}} \quad (u>0$ sur I)	$2\sqrt{u}+k \ (k\in\mathbb{R})$
$u'\sin u$	$-\cos u+k \ (k\in\mathbb{R})$
$u'\cos u$	$\sin u+k \ (k\in\mathbb{R})$
$\dfrac{u'}{u} \quad (u\neq 0$ sur I)	$\ln\lvert u\rvert+k \ (k\in\mathbb{R})$
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u+k \ (k\in\mathbb{R})$
$u'u^\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ u>0$ sur I)	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+k \ (k\in\mathbb{R})$

N.B. :

$\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$ (la notation $\sqrt{u}$ est autorisée !)

VI. Exemples de calculs de primitives

1°) Exemple 1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

On pose $u(x)=x^2+1$.

$u'(x)=2x$

On effectue une **réécriture** de f.

$$f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par $F=2\sqrt{u}+k \ (k\in\mathbb{R})$.

$F(x)=2\sqrt{u(x)}+k \quad (k\in\mathbb{R})$

$\boxed{F(x)=2\sqrt{x^2+1}+k} \ (k\in\mathbb{R})$

Commentaires :

On dit « les » primitives à cause du k.
On voit que chercher une primitive c'est beaucoup plus compliqué que chercher une dérivée.
On fait en deux temps.

2°) Exemple 2

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\dfrac{x^3}{(x^4+1)^6}$

Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u^n}$.

On pose $u(x)=x^4+1$.

$u'(x)=4x^3$

On effectue une **réécriture** de $f(x)$.

$$f(x)=\underbrace{\frac{1}{4}}_{\substack{\text{constante}\\ \text{d'ajustement}}}\times\frac{4x^3}{\left(x^4+1\right)^6}$$

On veut faire « sauter » le 4 pour retrouver le x^3 (c'est un langage imagé mais qui a le mérite de parler).

$$f=\frac{1}{4}\times\frac{u'}{u^6}$$

(On utilise le tableau : $\dfrac{u'}{u^n}\to-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$.)

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$F=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{(6-1)u^{6-1}}\right]+k\quad(k\in\mathbb{R})$$

$$F(x)=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5\left[u(x)\right]^5}+k\quad((k\in\mathbb{R})$$

$$\boxed{F(x)=-\frac{1}{20\left(x^4+1\right)^5}+k}\quad(k\in\mathbb{R})$$

3°) Exemple 3

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 5\sin x\times\cos^3 x$

Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

$$f(x)=5\sin x\times(\cos x)^3.$$

On pense à la forme $u'u^n$.

On pose $u(x)=\cos x$.

$u'(x)=-\sin x$

On effectue une **réécriture** de $f(x)$.

$$f(x)=-5\times(-\sin x)\times(\cos x)^3$$

$$f=-5\times u'\times u^3$$

(On utilise le tableau : $u'u^n\to\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$.)

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$F=-5\times\frac{u^4}{4}+k\quad(k\in\mathbb{R}).$$

$$F(x)=-5\times\frac{\left[u(x)\right]^4}{4}+k\quad(k\in\mathbb{R})$$

$$\boxed{F(x)=-\frac{5}{4}(\cos x)^4+k}\quad(k\in\mathbb{R})$$

On peut aussi écrire : $F(x)=-\dfrac{5}{4}\cos^4 x+k$.

4°) Exemple 4

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 5x-1+3\cos x$

Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On fait la primitive terme à terme.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$F(x)=5\times\frac{x^2}{2}-x+3\sin x+k\quad(k\in\mathbb{R})$$

$$\boxed{F(x)=\frac{5x^2}{2}-x+3\sin x+k}\,(k\in\mathbb{R})$$

5°) Exemple 5

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u}$.

On pose $u(x) = x^2 + 1$.

$u'(x) = 2x$

On effectue une **réécriture** de f.

$f = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u}$

(On utilise le tableau : $\dfrac{u'}{u} \to \ln|\,u\,|$)

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$F = \dfrac{1}{2}\ln|\,u\,|$

$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\,x^2+1\,\right| + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Valeurs absolues de sécurité (qu'on peut enlever après avoir constaté que l'expression est strictement positive).

$\boxed{F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + k} \quad (k \in \mathbb{R})$.

VII. Primitives et calculatrices

Il n'y a pas d'application du type Symbolic pour déterminer des primitives sur la calculatrice.
On peut cependant dériver le résultat obtenu par primitivation.
On peut rentrer les formules de primitives dans les calculatrices.

Primitive de la fonction racine carrée :

Pour trouver une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$, on écrit $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

D'où une primitive $F : x \mapsto \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Comme c'est simple, on ne la donne pas dans le cours.