La récurrence forte

Principe :

Le principe est le même que pour la récurrence « normale ». La seule différence est que l'on suppose que $P(k)$ est vraie pour tous les entiers k compris entre 0 et n au sens large, alors que pour la récurrence normale, on considère seulement un entier naturel k (et pas tous les entiers naturels k compris entre 0 et n).

Structure :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une phrase $P(n)$ qui dépend de n.

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
On fait le calcul.
Donc $P(0)$ est vraie.

On suppose que $P(k)$ est vraie pour tous les entiers k compris entre 0 et n au sens large.
Démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.
On fait les calculs.

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour tous les entiers k compris entre 0 et n, alors $P(n+1)$ est également vraie.
On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Intérêt :

Nous verrons l'intérêt d'une récurrence forte dans les exercices.
Par exemple, dans l'exercice $\boxed{\mathbf{1}}$, il est impossible de faire une récurrence simple.

Exercices sur la récurrence forte

$\boxed{1}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(u_0{}^2 + u_1{}^2 + \ldots + u_n{}^2\right)$ pour tout entier naturel *n*.

Tous les termes de cette suite sont-ils des entiers naturels ?

Solution :

Calcul des premiers termes u_1, u_2, …

$$u_1 = \frac{1}{0+1} \times u_0{}^2 = \frac{1}{1} \times 1 = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \times \left(1^2 + 1^2\right) = 1$$

$u_3 = 1 \ldots$

Conjecture : Tous les termes de la suite sont égaux à 1 (et donc tous les termes de la suite sont des entiers).

On effectue une **récurrence forte**.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = 1$ ».

• Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$u_0 = 1$

Donc $P(0)$ est vraie

• Soit *n* un entier naturel fixé.
On suppose que $P(k)$ est vraie pour tous les entiers *k* compris entre 0 et *n* au sens large.
Démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{n+1} = 1$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(u_0{}^2 + u_1{}^2 + \ldots + u_n{}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k{}^2$$

$$= \frac{1}{n+1} \times (n+1)$$

$$= 1$$

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour tous les entiers naturels k compris entre 0 et n, alors $P(n+1)$ est également vraie.

On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
Donc $u_n = 1$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout entier naturel n.

Exprimer le terme général en fonction de n.

Solution :

Calcul des premiers termes u_1, u_2, …

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_3 = 4 \\ u_4 = 8 \\ u_5 = 16 \end{array}\right\} \text{On conjecture que } u_n = 2^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 1.$$

Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2^{n-1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = 2^{n-1}$ ».

● Vérifions que $P(1)$ est vraie.

D'une part, $u_1 = u_0 = 1$.

D'autre part, $2^{1-1} = 2^0 = 1$.

On a bien $u_1 = 2^{1-1}$ et par conséquent, la phrase $P(1)$ est vraie.

● Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 1 fixé.
On suppose que $P(k)$ est vraie pour tous les entiers *k* compris entre 1 et *n* au sens large.
Démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{n+1} = 2^n$.

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$= u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k$$

$$= 1 + \underbrace{2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$= 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

On a démontré que $P(1)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour tous les entiers *k* compris entre 1 et *n*, alors $P(n+1)$ est également vraie.

On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Donc $u_n = 2^{n-1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et les relations

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ u_n + 1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}.$$

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5. Conjecturer u_n en fonction de *n*.

2°) Démontrer la conjecture en utilisant une récurrence forte.

3°) Écrire une fonction Python qui prend pour argument un entier naturel *n* quelconque et qui renvoie la liste de tous les termes jusqu'à u_n.

Solution :

```
def suite(n):
    L=[0]
    for i in range(n):
        if i%2==0:
            L.append(2*L[i//2]+1)
        else:
            L.append(L[i]+1)
    return L
```