TS

La continuité des fonctions (2)
(Théorème de valeurs intermédiaires)

Partie A : les théorèmes

I. Le théorème des valeurs intermédiaires : 3 formulations équivalentes

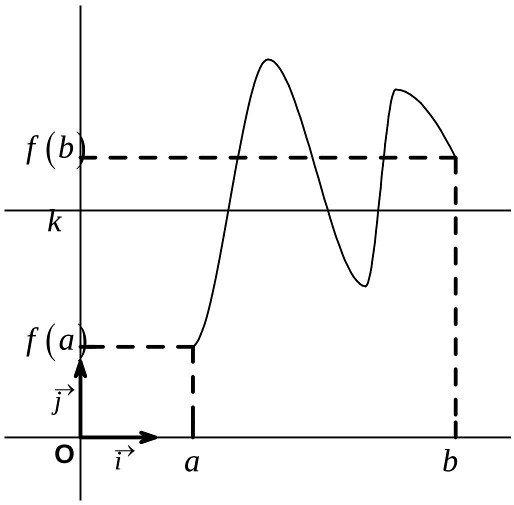
Le théorème des valeurs intermédiaires est admis sans démonstration.

1°) Formulation 1

f **est une fonction définie et continue sur un intervalle [*a* ; *b*] (*a* < *b*).**

Pour tout réel *k* compris entre *f* (*a*) et *f* (*b*) (au sens large c'est-à-dire $f(a) \leqslant k \leqslant f(b)$), il existe au moins un réel $c \in [a\,;\,b]$ tel que *f* (*c*) = *k*.

Autrement dit, *f* prend, entre *a* et *b*, toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.



2°) Formulation 2

f **est une fonction définie et continue sur [*a* ; *b*] (*a* < *b*).**

Toute valeur intermédiaire *k* comprise entre *f* (*a*) et *f* (*b*) au sens large admet au moins un antécédent par *f*.

3°) Formulation 3 (en termes d'équations)

f est une fonction définie et continue sur $[a\ ;\ b]$ $(a < b)$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ au sens large, l'équation $f(x) = k$ admet <u>au moins une</u> solution dans $[a\ ;\ b]$.

Dans la suite du cours, on s'intéressera beaucoup aux équations ; aussi est-ce la formulation 3 qui sera privilégiée.

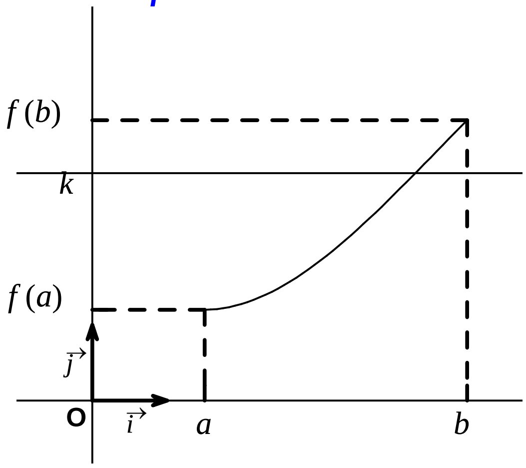
II. <u>Cas des fonctions continues strictement monotones</u>

1°) Propriété de « la » valeur intermédiaire (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

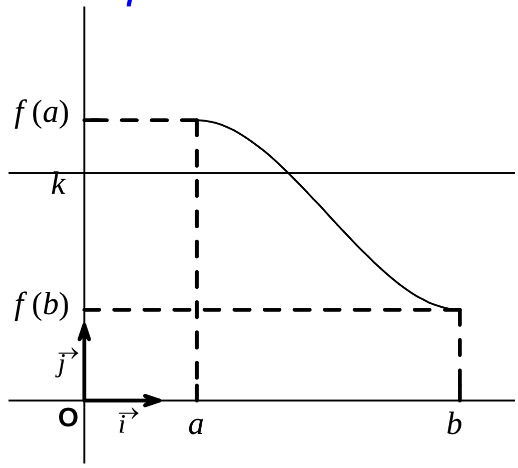
f est une fonction définie, continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$ $(a < b)$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ au sens large, il existe un unique réel $c \in [a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$.

• Cas où f est strictement croissante



• Cas où f est strictement décroissante



x	a	c	b
Var. de f	$f(a)$	k	$f(b)$

x	a	c	b
Var. de f	$f(a)$	k	$f(b)$

Le tableau de variation fait apparaître les choses de manière très visuelle.

Définition du mot *corollaire* :

• Proposition logique découlant d'une autre

• Conséquence immédiate d'un théorème énoncé et démontré

Exemple :

Le théorème d'Al Kashi a pour corollaire le théorème de Pythagore).

2°) Convention des tableaux de variation

Par convention, la flèche traduit :

• la stricte monotonie (croissance stricte ou décroissance stricte)

• la continuité.

3°) Démonstration

Cas où *f* est strictement croissante sur I.

Il existe au moins un réel $c \in [a\ ;\ b]$ tel que $f(c)=k$.
f est strictement croissante sur I donc :

• si *x* est un réel de I tel que $x<c$, alors $f(x)<k$.

• si *x* est un réel de I tel que $x>c$, alors $f(x)>k$.

On démontre le cas où *f* est strictement décroissante sur I de manière analogue.

III. Exemples de mise en œuvre

1°) Exemple 1

On considère une fonction *f* définie et continue sur l'intervalle I = [– 2 ; 2] telle que *f* (– 2) = – 3 et *f* (2) = 4.
Que peut-on dire de l'équation *f* (*x*) = 1 ?

f est continue sur l'intervalle I.
$f(-2)=-3$; $f(2)=4$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel *k* compris entre – 3 et 4, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans I.

En particulier, en prenant $k=1$, on peut dire que l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution dans I.

2°) Exemple 2

On considère une fonction *f* définie, continue et strictement croissante sur l'intervalle I = [– 3 ; 4] telle que *f* (– 3) = – 3 et *f* (4) = 5.
Que peut-on dire de l'équation *f* (*x*) = 0 ?

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I.

$f(-3) = -3$; $f(4) = 5$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la valeur intermédiaire), pour tout réel k compris entre – 3 et 5, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

En particulier, en prenant $k = 0$, on peut dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.

IV. Cas d'une fonction constante sur un intervalle $[a\,;b]$

Il n'est pas inintéressant d'examiner ce que donne le cas particulier d'une fonction constante.

Dans ce cas, il existe un réel u tel que pour tout réel x de l'intervalle $[a\,;b]$, on ait $f(x) = u$.
La seule valeur intermédiaire comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est alors u.

Les solutions de l'équation $f(x) = u$ sont tous les réels de l'intervalle $[a\,;b]$

Partie B : application aux équations

I. Exemple de résolution approchée d'une équation

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + x - 3$.

1°) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle I = [1 ; 2].

Pour commencer, on peut noter que l'on ne sait pas résoudre l'équation $f(x) = 0$ (c'est-à-dire $x^3 + x - 3 = 0$).

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 + 1$

Par suite, $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur I.

x	1	α	2
SGN de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	-1	0	7

❶ f est continue sur I.

❷ f est strictement croissante sur I.

❸ $f(1) = -1$ et $f(2) = 7$

0 est compris entre – 1 et 7 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans I.

On ne sait pas déterminer la valeur exacte de α mais on peut déterminer des encadrements de α.

Il existe plusieurs méthodes pour encadrer les solutions d'une équation.
Dans la suite du chapitre, nous allons étudier deux méthodes importantes : la méthode de balayage et la méthode de dichotomie.

- On peut démontrer que α est un nombre irrationnel (cf. cours de spécialité).
- On peut donner la valeur exacte de la solution α avec la formule de Cardan (cf. plus loin).

2°) Déterminons un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

- On emploie la « méthode de balayage » qui fournit des encadrements d'amplitude 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} … et donc des valeurs approchées de plus en précises de α.

- On remplit un tableau de valeurs (grâce à la calculatrice) de 1 à 2 avec un « pas » de 10^{-1}.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	– 1	– 0,56	– 0,072	0,497	1,144	1,875	2,646	3,613	4,632	5,759	7

$1{,}2 < \alpha < 1{,}3$

Ainsi, la valeur décimale approchée d'ordre 1, par défaut de α est 1,2.

On a : $\alpha = 1,2...$

● On peut reprendre la même méthode avec un « pas » de 10^{-2} de 1,2 à 1,3.

On trouve $1,21 < \alpha < 1,22$.

Ainsi, la valeur décimale approchée d'ordre 2, par défaut de α est 1,21.

On a : $\alpha = 1,21...$

Comme l'équation est $f(x) = 0$, il suffit de repérer le changement de signe dans le tableau.
Mais cette méthode marche aussi pour une équation de la forme $f(x) = k$ avec $k \neq 0$, sauf que, dans ce cas, on ne repère pas de changement de signe.

Quand on un tableau de balayage d'ordre 1, c'est la ligne des *x* où les valeurs doivent avoir 1 chiffre après la virgule.

Quand on un tableau de balayage d'ordre 2, c'est la ligne des *x* où les valeurs doivent avoir 2 chiffres après la virgule.

etc.

3°) Mise en garde (remarque importante)

Le réemploi de α dans la suite d'un exercice ou d'un problème nécessite d'écrire α (et non une valeur approchée).
Même si l'on a déterminé une valeur approchée de α, on ne peut pas remplacer α par cette valeur approchée.

Par exemple, il est possible d'en déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de *x*.

Ainsi, on écrira :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
SGN de $f(x)$		–	0	+	

Ne pas écrire :

x	$-\infty$	1,21	$+\infty$
SGN de $f(x)$	$-$	≈ 0	$+$

II. Utilisation de la calculatrice (« solveur » d'équations)

1°) Équations de la forme $f(x) = 0$

On reprend l'exemple du **I**. Voir la fin du chapitre pour des explications plus détaillées.

Sur TI 83 Plus	**Sur CASIO Graph 35 +**
Tracer la courbe représentative de *f*. $\boxed{\text{Y =}}$ (ici X^3 + X – 3) $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (calculs) Descendre à la ligne 2 : zero ou root puis taper sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$. (Le mot « root » signifie « racine » en anglais.) **Encadrement du zéro** ① Left bound ? ou Borne inf ? Avec le curseur se placer avant X = … Y = … $\boxed{\text{entrer}}$ ② Right bound ? ou Borne sup ? Avec le curseur se placer après X = … Y = … $\boxed{\text{entrer}}$ ③ Guess ? Taper absolument $\boxed{\text{entrer}}$ Il y a un petit temps pour chercher. Le zéro s'affiche. X = 1,2134117 (valeur approchée de α) (bien en conformité avec l'encadrement déterminé précédemment)	Graph dans le MENU Rentrer la fonction Taper **G-solv** + **Root** (« racine » en anglais) Le curseur s'affiche tout seul.

Pour l'exemple du **I**, on peut écrire : $\alpha = 1,213411...$

Borne inf et Borne sup correspondent aux valeurs en abscisses (et pas les valeurs en ordonnées).

2°) Équations de la forme $f(x) = g(x)$

On utilise les commandes spéciales permettant de déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de *f* et *g*.

Sur TI-83 Plus

On trace les deux courbes sur l'écran de la calculatrice.

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (calculs) 5 : intersect

On procède de la même manière que dans le cas d'une équation de la forme $f(x)$ en plaçant la croix successivement « avant » et « après » le point d'intersection dont on cherche une valeur approchée de l'abscisse.
On obtient en fait l'affichage des coordonnées (ou plutôt de valeurs approchées des coordonnées) du point d'intersection.

S'il y a plusieurs points d'intersection, on répète plusieurs fois la même démarche.

3°) Pour connaître plus de décimales de la solution α sur les calculatrices TI-83

Avec l'exemple, en utilisant "calc" pour trouver on avait l'affichage suivant $\text{X} = 1,2134117$.
Mais en sortant du graphique, on peut taper simplement : "X" (puis "enter") pour avoir 2 chiffres supplémentaires après la virgule.
On obtient alors l'affichage : $\text{X} = 1,213411663$.
Et pour être encore plus précis, on tape "MATH", puis "0" (Solveur). Il faut alors rentrer l'équation 0 = X (juste taper X), puis taper "entrer".

$\boxed{\text{math}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{\text{entrer}}$

On obtient alors l'affichage : "$\text{X} = 1,2134116627$".
En appuyant sur la flèche droite, on fait défiler les décimales.
On trouve : 1,2134116627622.
On passe alors de 7 à 13 chiffres après la virgule.
Il faut cependant noter que l'on ne peut être sûr que la dernière décimale soit juste.

On pourra donc écrire : **α = 1,213411662762…** .

III. Utilisation d'un logiciel de calcul formel

Un logiciel de calcul permet de résoudre une équation de manière approchée (et éventuellement de manière exacte lorsque c'est possible).

Voir exercices.

IV. Valeur exacte de la solution de l'équation de l'exemple du I.

L'équation $x^3+x-3=0$ est du type $x^3+px+q=0$ avec $p=1$ et $q=-3$.

Nous allons admettre le résultat suivant :

Si $4p^3+27q^2>0$, alors l'équation $x^3+px+q=0$ admet une unique racine réelle

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$ (formule de Cardan).

$\sqrt[3]{x}$ désigne la racine cubique du réel *x* c'est-à-dire le réel dont le cube est égal à *x*.
On peut l'obtenir grâce à la commande de la calculatrice. Sur calculatrice TI 83, appuyer sur la touche $\boxed{\text{math}}$ MATH 4 : $\sqrt[3]{\ }$( ).

r

Nous allons appliquer ce résultat à notre équation.

$$\begin{aligned}\Delta &= 4p^3+27q^2\\ &= 4\times1^3+27\times(-3)^2\\ &= 4+243\\ &= 247\end{aligned}$$

$\Delta>0$ donc on retrouve que l'équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Cette solution est donnée par : $\alpha=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3}}$ soit

$\alpha=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{247}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{247}{108}}}$ ou encore, si l'on veut, $\alpha=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{741}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{741}}{18}}$.

Cette écriture donne la valeur exacte de α sous la forme d'une expression à l'aide de radicaux.
Cette écriture ne peut pas être simplifiée.
À l'aide de la calculatrice, en utilisant la racine cubique, on peut retrouver le début de l'écriture décimale de α que nous avions obtenu en utilisant la commande de résolution d'équations de la calculatrice.

La résolution exacte des équations (c'est-à-dire la détermination de valeurs exactes des solutions) n'est pas en général pas possible. C'est pourquoi on utilise fréquemment une résolution approchée des équations c'est-à-dire que l'on détermine des encadrements ou – ce qui est lié – des valeurs approchées des solutions. Nous avons déjà vu la méthode de balayage. Nous allons étudier à présent une méthode très importante : la méthode de dichotomie.

Partie C : la dichotomie

I. Introduction

1°) Résolution approchée

Il n'est pas toujours possible de résoudre de manière exacte des équations et même quand c'est possible, les formules peuvent être très compliquées (c'est le cas par exemple des équations polynomiales du troisième degré pour lesquelles il existe des formules, appelées « formules de Cardan », qui sont plus compliquées que celles pour le second degré et que nous n'étudierons pas cette année).
Aussi doit-on parfois se contenter de résolutions approchées d'équations.
Très tôt, les mathématiciens ont inventé différentes méthodes permettant de déterminer des valeurs approchées de solutions pour des équations qu'ils ne savaient pas résoudre de manière exacte.
Ces méthodes ont toutes un intérêt.
Parmi celles-ci, outre la méthode de balayage, figure la **méthode de dichotomie**.
C'est une très ancienne méthode.
Par rapport à la méthode de balayage, la méthode de dichotomie va beaucoup plus vite.

2°) Au sujet de la méthode

• Le mot dichotomie est un mot d'origine grecque qui signifie **« partage en deux »**.

• La méthode de dichotomie est une méthode qui permet de déterminer des encadrements de solutions d'équations quand on ne sait pas les résoudre de manière exacte (on parle de résolution approchée).
Cette méthode a l'avantage d'être simple, d'être plus rapide que la méthode de balayage pour obtenir des encadrements à une précision donnée et d'être algorithmique.

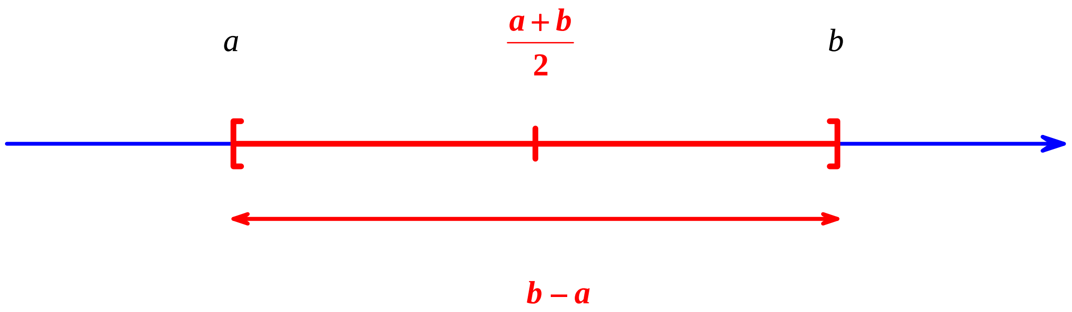
• C'est aussi une méthode de raisonnement qui s'avère être un outil puissant de démonstration.
Cet aspect en lien avec les suites ne sera pas développé cette année, mais il est bon de savoir qu'il fournit un moyen de démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.

On retiendra que la dichotomie présente deux aspects : un aspect pratique et un aspect théorique, mais que seul l'aspect théorique sera développé cette année.

3°) Prérequis : centre et amplitude d'un intervalle fermé borné

• Le **centre** d'un intervalle $[a\ ;\ b]$ ($a < b$) est égal à $\dfrac{a+b}{2}$.

• L'**amplitude** d'un intervalle $[a\ ;\ b]$ ($a < b$) est égal à $b - a$.



II. Principe de la méthode

1°) Reprise de l'exemple du I de la partie B

On va expliquer le principe de la méthode de dichotomie sur l'exemple du **I** de la **partie B**.

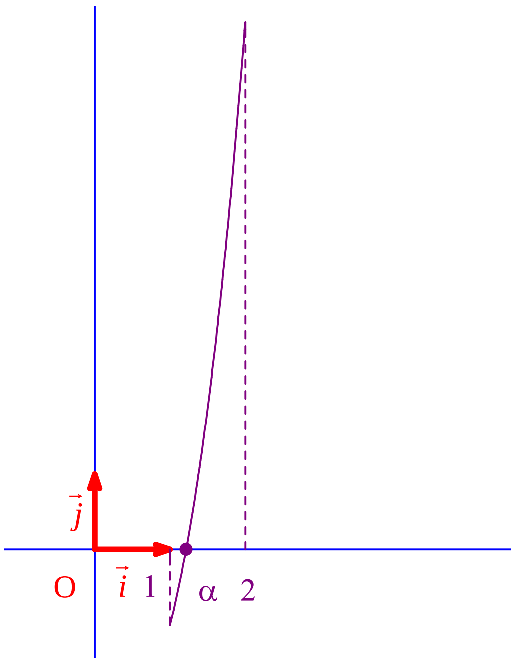
Il s'agit de l'équation $x^3 + x - 3 = 0\ \ (\mathrm{E})$.

On a démontré que (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α.

Il faut déjà avoir un encadrement de départ.

On a démontré que **$1 < \alpha < 2$**.

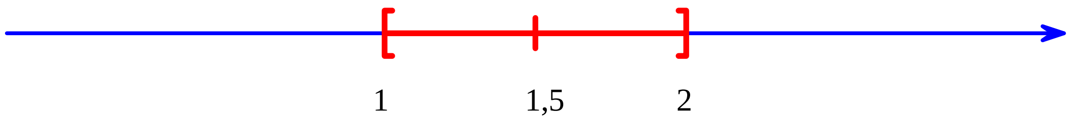
On désire déterminer un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à un nombre strictement positif donné.



[On avait effectué les calculs $f(1) = -1$ et $f(2) = 7$]

On part donc de l'intervalle [1 ; 2].

Étape 0		**1 < α < 2**	Amplitude 1
Étape 1	$f(1,5) = 1,875$	**1 < α < 1,5**	Amplitude $\frac{1}{2}$
Étape 2	$f(1,25) = 0,203125$	**1 < α < 1,25**	Amplitude $\frac{1}{4}$
....			



À l'étape 0, l'amplitude de l'encadrement est égale à 1.

À l'étape 1, l'amplitude de l'encadrement obtenu est égale à $\frac{1}{2}$.

À l'étape 2, l'amplitude de l'encadrement obtenu est égale à $\frac{1}{4}$.

….

À l'étape *n*, l'amplitude de l'encadrement obtenu est égale à $\frac{1}{2^n}$.

On s'arrête ensuite lorsque l'amplitude de l'intervalle est inférieure ou égale au nombre fixant la précision au départ.

On va voir dans la suite que l'on peut automatiser les calculs au moyen d'un algorithme.

2°) Résultat à retenir

Lorsque l'on effectue la méthode de dichotomie en partant d'un encadrement du type $a < \alpha < b$ (où α désigne la solution de l'équation).

À l'étape *n*, l'encadrement de α obtenu est d'amplitude $\frac{b-a}{2^n}$.

3°) Compétence attendue

Il est important de savoir faire la méthode de dichotomie « à la main ».

III. Algorithme de dichotomie sur un exemple

On reprend toujours le même exemple.

1°) Présentation

On va introduire des variables *a*, *b*, *m*.

On note *m* le centre de l'intervalle $[a\,;b]$. On sait que $m=\dfrac{a+b}{2}$.
On va traiter *a*, *b*, *m* comme des variables informatiques, c'est-à-dire qu'elles changent de valeurs au cours de l'algorithme.

Dans le tableau ci-dessous, afin d'alléger les écritures, le signe d'égalité est exceptionnellement employé pour noter des affectations.

		Valeur exacte de *m*	**Valeur de *f* (*m*)**	**Signe de *f* (*m*)**	**Position de α par rapport à *m***	**Donc on remplace**	**Nouvel intervalle de recherche**	**Amplitude l'intervalle**
Étape 1	$a=1$ $b=2$	$m=1{,}5$	$f(m)=1{,}875$	$f(m)>0$	$\alpha<m$	*b* par *m*	α ∈ [1 ; 1,5]	**0,5**
Étape 2	$a=1$ $b=1{,}5$	$m=1{,}25$	$f(m)=0{,}203125$	$f(m)>0$	$\alpha<m$	*b* par *m*	α ∈ [1 ; 1,25]	**0,25**
Étape 3								

Dans l'étape 1, on prend $a=1$ et $b=2$.
On calcule $m=\dfrac{a+b}{2}$ (centre de l'intervalle [*a* ; *b*] ou moyenne des nombres *a* et *b*).
On calcule ensuite $f(m)$.
On a : $f(m)>0$. Donc comme *f* est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; 2], on peut dire que $\alpha\in[a\,;m]$ (on est « monté » trop haut).
On recommence avec le nouvel intervalle de recherche en conservant à *a* la valeur 1 et en donnant à *b* la valeur de *m*.

2°) Rédaction en langage naturel

Le nombre d'itérations n'est pas connu à l'avance. On utilise une **boucle « Tantque ».**

On suppose que la fonction $f : x \mapsto x^3 + x - 3$ a été rentrée à l'avance.

Entrée :
Saisir e (réel strictement positif)

Initialisations :
a prend la valeur 1
b prend la valeur 2

Traitement :
Tantque $b - a > e$ **Faire**
  m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(m) > 0$
    alors b prend la valeur m
    Sinon
    a prend la valeur m
  FinSi
FinTantque

Sortie :
Afficher a, b

IV. Algorithme de dichotomie dans le cas général (algorithme provisoire)

1°) Notations

On se place dans le cas général avec les hypothèses suivantes :

f est une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires.
On sait alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[a, b]$.

Graphiquement, cette solution est l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f dans un repère avec l'axe des abscisses.

En appliquant la méthode de dichotomie, on obtient des encadrements de α d'amplitude $\dfrac{b-a}{2^n}$.

2°) Rédaction en langage naturel

Entrées :
Saisir
a, *b* : bornes de l'intervalle de définition
f : fonction étudiée
e : réel strictement positif

Traitement :
Tantque $b-a>e$ **Faire**
m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
Si $f(m)$ et $f(a)$ sont de même signe alors
a prend la valeur m
Sinon
b prend la valeur m
FinSi
FinTantque

Sorties :
Afficher *a*, *b*

3°) Commentaires

• On a une fonction comme variable ce qui est peu courant.

• Quel est le rôle des variables informatiques *a* et *b* dans cet algorithme ?

Au départ, *a* et *b* désignent les bornes de l'intervalle dans lequel se trouve la solution.
Dans l'algorithme, *a* et *b* désignent les bornes successives de l'intervalle dans lequel on va localiser la solution.

Il y a donc une petite difficulté sur le statut des lettres *a* et *b* dans l'écriture de l'algorithme.

On doit rentrer $a<b$.

• Que représente la variable *m* ?

m désigne le centre de l'intervalle $[a\,;b]$.

• On pourrait ne pas donner de nom à la variable *m*.
Il n'est pas utilise de nommer *m* dans l'algorithme (on peut d'ailleurs réécrire l'algorithme en remplaçant directement *m* par $\dfrac{a+b}{2}$). Mais l'introduction de la variable *m* permet une meilleure lisibilité de l'algorithme.

• Quel est le rôle de la variable *e* ?

La variable *e* sert à fixer à l'avance l'amplitude de l'encadrement de la solution.
Cette variable ne s'affiche pas.
Sa valeur ne change pas durant tout l'algorithme.

C'est cette valeur qui détermine le nombre d'itérations mais ce n'est pas une variable d'itération.

On peut prendre $e = 0,001$ par exemple (on décide de prendre cette valeur au début). Cette valeur est rentrée au début mais ne s'affiche pas.
À la fin de l'algorithme, on obtiendra un encadrement de la solution d'amplitude inférieure ou égale à 0,001.

• Le test d'arrêt est « $b - a > e$ ».

• À l'intérieur de la boucle, il y a une instruction conditionnelle.

• L'algorithme se termine bien car, pour tout réel e strictement positif, il existe toujours un entier naturel n tel que $\frac{b-a}{2^n} < e$.

• Il serait intéressant de s'intéresser au « coût » de l'algorithme, c'est-à-dire, en gros, au nombre d'opérations à effectuer pour atteindre la précision demandée. Nous ne le ferons pas dans ce chapitre. Cet aspect est en lien avec l'aspect suite évoqué plus loin.

4°) Programmation sur calculatrice ou sur ordinateur

La condition « $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe » peut se traduire par $f(a) \times f(m) > 0$.
En effet, deux réels non nuls sont de même signe si et seulement si leur produit est strictement positif.

Programme sur calculatrice TI

```
: Prompt A, B, E
: Input " Y1 = ", Y1
: While B – A > E
: (A + B) / 2 → M
: If Y1(A)∗Y1(M) < 0
: Then
: M → B
: Else
: M → A
: End
: End
: Disp A, B
```

On notera que, pour rentrer une fonction dans une calculatrice TI, on doit taper l'instruction :
Input " Y1 = ", Y1.

Pour taper Y1 dans le programme, appuyer sur la touche $\boxed{\text{var}}$ puis faire les choix suivant : Y-VARS, function, Y1.

Exécution du programme :
Y1 = " …. "   mettre les guillemets

Faire tourner le programme avec $f : x \mapsto x^3 + x - 3$.

$a = 1$
$b = 2$
$e =$ au choix

V. Algorithme définitif

1°) Un essai

On va tester le programme précédent avec l'équation $x^2 = 0$.
On sait que la solution de cette équation est évidente : elle est égale à 0.

On va partir du fait que la solution (que nous connaissons) est comprise entre 0 et 1.

On rentre donc :

$\text{A} = 0$

$\text{B} = 1$

$\text{Y1} = "\text{X}^2"$

$\text{E} = 10^{-6}$

En faisant tourner le programme, on obtient l'affichage suivant : $\text{A} = 0{,}99992$ et $\text{B} = 1$.

On constate une anomalie (un « bug ») dans une des applications de l'algorithme avec cette équation.
On a donc mis en évidence une « limite » du programme.

On retiendra donc que dans certains cas la solution cherchée correspond à une valeur de m calculée pendant l'exécution de l'algorithme. Si ce cas se produit, il suffit d'arrêter la recherche !

2°) Rédaction de l'algorithme corrigé

Voir le fait que m ne soit pas défini avant le Tantque.

Entrées :
Saisir
a, b : bornes de l'intervalle de définition
f : fonction étudiée
e : réel strictement positif

Traitement :
Tantque $b-a>e$ et $f(m)\neq 0$ **Faire**
m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
Si $f(m)\times f(a)\leqslant 0$
alors b prend la valeur m
Sinon
a prend la valeur m
FinSi
FinTantque

Sorties :
Si $f(m)=0$
Alors afficher « Valeur exacte : », m
Sinon
Afficher « Encadrement : », a, b
FinSi

La variable m n'est pas définie lors du premier « Tantque » ; elle ne prend de valeur qu'après le deuxième « Tantque ».

L'algorithme s'arrête lorsque, pour la première fois, on a : $b-a\leqslant e$ ou $f(m)=0$ (négation de la condition).

On peut aussi écrire l'algorithme avec une boucle « Répète ».

Entrées :
Saisir
a, b : bornes de l'intervalle de définition
f : fonction étudiée
e : réel strictement positif

Traitement :

Répète m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$

Si $f(a)\times f(m)<0$
alors b prend la valeur m
Sinon
a prend la valeur m
FinSi

Jusqu'à $\dfrac{b-a}{2}<e$ ou $f(m)=0$ **Faire**

Sortie :
Afficher m

VI. Aspect « suites »

La méthode de dichotomie permet de définir deux suites (a_n) et (b_n) de la manière suivante.

On pose $a_0=a$ et $b_0=b$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, si $f(a_n)\times f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)<0$,

alors $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$,

sinon $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$.

Ces deux suites sont appelées **« suites dichotomiques »**.

Ces deux suites vérifient : $\forall n\in\mathbb{N}\quad b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$.

On peut démontrer que (a_n) est croissante, que (b_n) est décroissante et qu'elles encadrent de plus en plus précisément la solution α de l'équation (on dit qu'elles « convergent » vers α).

Cet aspect ne sera pas développé dans ce chapitre.

Historique :

Le théorème des valeurs intermédiaires a été démontré en 1837 par le mathématicien Bolzano (voir site Internet).
Le mathématicien français Augustin Cauchy (1$^{\text{ère}}$ moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle) l'énonce également dans son *Cours d'analyse*.

Documents complémentaires à lire :

Lire les documents suivants qui se trouvent en TS dans la rubrique approfondissement :

- Formule de Cardan

- Méthode de Lagrange ou méthode de la sécante

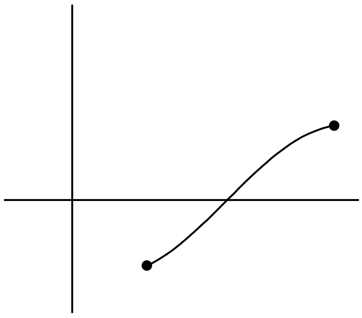
- Méthode de Newton

Déterminer une valeur approchée d'une solution avec une calculatrice TI

On a une fonction f définie sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$.

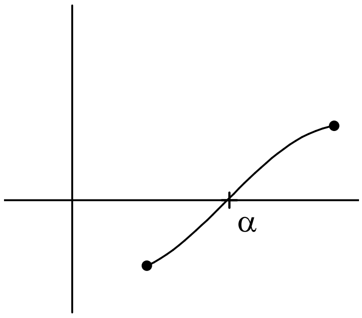
On a démontré que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I.

1er travail : afficher la courbe de la fonction.



Pour nous, dans notre exemple, f est strictement croissante sur l'intervalle I.

Graphiquement, la solution α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses.



On cherche grâce à la calculatrice une valeur « assez précise » de α.

2e travail : chercher une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (calculs)

Descendre à la ligne 2 : zero ou root (qui veut dire racine en anglais) puis taper sur $\boxed{\text{entrer}}$.

Une petite croix apparaît sur la courbe. Il s'agit d'un point de la courbe dont les coordonnées x et y sont données en bas de l'écran.

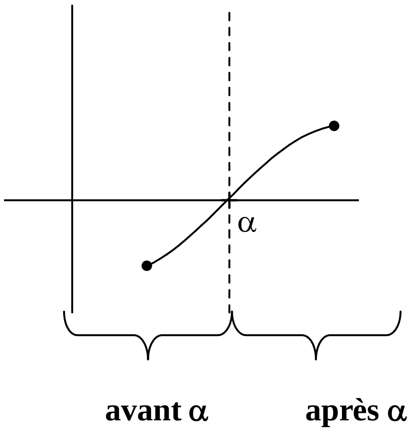
Cette petite croix est mobile. On peut la bouger grâce aux touches ► et ◄ (on ne se sert pas des touches ▲ et ▼).

La touche ► servira à avancer la croix.

La touche ◄ servira à reculer la croix.

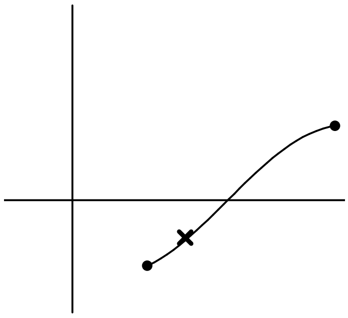
La calculatrice va poser trois questions formulées ainsi :

① Left bound ? ② Right bound ? ③ Guess ?	① Borne Inf ? ② Borne Sup ? ③ Valeur Init ?



1ère question : Left bound ? ou Borne Inf ?

Il faut se placer avec le curseur avant α.

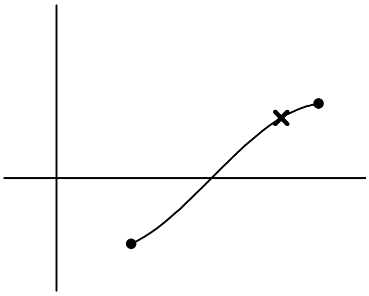


En bas de l'écran, s'affichent les coordonnées *x* et *y* du point marqué par la croix.
L'abscisse *x* est un nombre inférieur à α ; l'ordonnée *y* est un nombre négatif.

C'est la valeur de *x* qui s'affiche en bas de l'écran qui constitue la borne inférieure de l'encadrement de α.

On tape $\boxed{\text{entrer}}$.

2^e question : il faut se placer avec le curseur après α. On utilise la touche ►.

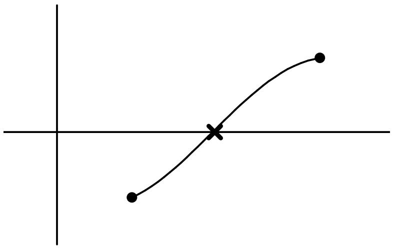


En bas de l'écran, les coordonnées x et y du point marqué par la croix ont changé.
L'abscisse x est un nombre supérieur à α ; l'ordonnée y est un nombre positif.
On tape $\boxed{\text{entrer}}$.

C'est la valeur de x qui s'affiche en bas de l'écran qui constitue la borne supérieure de l'encadrement de α.

3^e question : on tape $\boxed{\text{entrer}}$.

Fin : La croix vient se placer au point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses.



Au bout de quelques secondes, en bas de l'écran, s'affiche : $x = ...$; $y = 0$.

La valeur de x qui s'affiche correspond à une valeur approchée de α.

La valeur de x que l'on lit donne une bonne valeur approchée de α.

Autre possibilité : on trace la courbe de la fonction f et celle de la fonction $g : x \mapsto 0$.
On cherche les abscisses des points d'intersection entre les courbes représentatives de f et g.