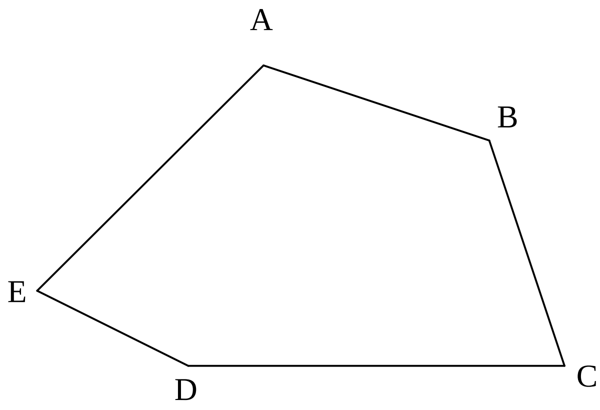
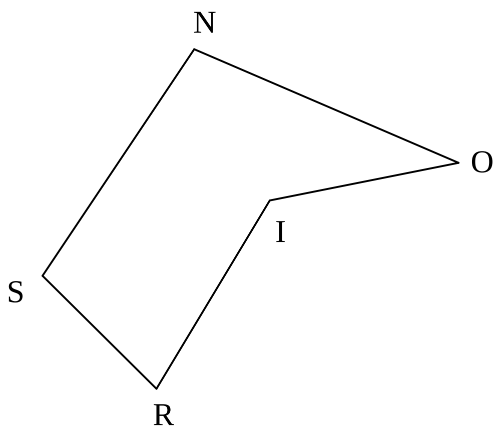
Problème sur les diagonales d'un polygone

Un *polygone* est une figure géométrique à plusieurs côtés ; on a tracé par exemple ci-après un polygone ABCDE à cinq côtés et cinq sommets.
Deux sommets tels que A et B, ou bien B et C, ..., ou bien E et A sont dits *consécutifs*.



Une *diagonale* d'un polygone est un segment dont les extrémités sont deux sommets non consécutifs de ce polygone ; par exemple, les segments [BE] et [AC] (non tracés) sont des diagonales du polygone ABCDE.

Un polygone est dit *convexe* lorsqu'il contient toutes ses diagonales ; ainsi, le polygone ABCDE ci-dessus est convexe.
Le polygone NOIRS ci-après est *non convexe* (ou *concave*) car il ne contient pas par exemple la diagonale [OR].



Dans la suite du problème, on ne considérera que des polygones convexes.

Le but du problème est de trouver une expression explicite en fonction de n du nombre d_n de diagonales d'un polygone (convexe) à n côtés (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3).

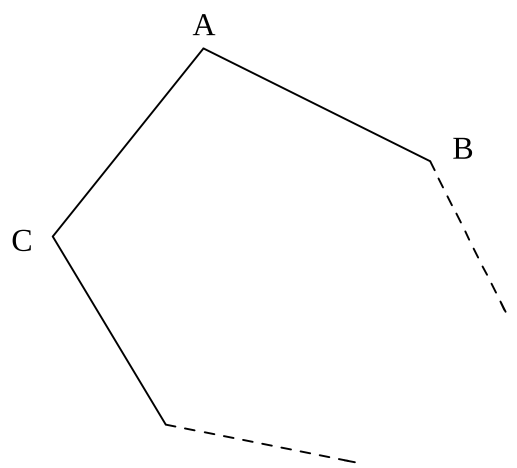
1°) Des exemples

a) Tracer un polygone (convexe) à 6 côtés. Tracer toutes ses diagonales.
Vérifier que : $d_6 = 9$.
b) Tracer un polygone (convexe) à 5 côtés. Tracer toutes ses diagonales.
En déduire la valeur de d_5.
c) Tracer un polygone (convexe) à 4 côtés. Tracer toutes ses diagonales.
En déduire la valeur de d_4.
d) Expliquer pourquoi : $d_3 = 0$.

2°) Une conjecture

a) Calculer : $d_4 - d_3$; $d_5 - d_4$; $d_6 - d_5$.
b) Quelle valeur de $d_7 - d_6$ peut-on prévoir ? En déduire quelle valeur on peut prévoir pour d_7.
c) Tracer un polygone (convexe) à 7 côtés. Tracer toutes ses diagonales.
Vérifier que le nombre de diagonales est bien égal à la valeur de d_7 prévue à la question précédente.
On peut donc conjecturer que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 3 : $d_{n+1} = d_n + n - 1$.

3°) Preuve de cette conjecture



Pour un entier *n* supérieur ou égal à 3 donné, considérons un polygone (convexe) P_{n+1} à $n+1$ côtés et donc $n+1$ sommets. Nommons A l'un de ces sommets, et B et C les deux sommets de P_{n+1} consécutifs à A.

a) Déterminer en fonction de *n* le nombre de diagonales de P_n qui ont pour sommet A.
b) Déterminer en fonction de d_n le nombre de diagonales de P_{n+1} qui n'ont pas pour sommet A.
c) En déduire que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 3, on a : $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.