1$^{\text{ère}}$ S

Sens de variation d'une fonction dérivable

Introduction :

Pour déterminer le sens de variation d'une fonction, nous disposons de plusieurs méthodes :

- **étude directe** ;

- **utilisation des règles d'opérations** (algébriques et composées avec la fonction racine et la fonction inverse).

La méthode par étude directe ne permet pas toujours d'étudier les variations d'une fonction car il n'est pas toujours facile de travailler avec des inégalités.

Il en est de même pour la méthode par utilisation des règles d'opérations.

Nous allons voir dans ce chapitre que la dérivée va nous fournir un moyen extrêmement efficace pour étudier les variations d'une fonction.

I. Taux de variation d'une fonction

1°) Rappel de définition

I est un intervalle.
f est une fonction définie sur I.
a et b sont deux réels quelconques dans I tels que $a \neq b$.

On appelle **taux de variation de f entre a et b** le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (égal aussi à $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$).

2°) Intérêt

Le taux de variation sert à quantifier les variations d'une fonction entre deux réels.
Nous verrons qu'il intervient dans des situations variées (par exemple, pour les vitesses moyennes).
Dans ce chapitre, la notion de taux de variation ne nous servira que dans le paragraphe **II** pour la démonstration du 1°).
Nous ne l'utiliserons pas dans la suite du chapitre.

3°) Taux de variation et monotonie

∗ **1$^{\text{er}}$ cas :** f est **croissante** sur I

• Si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$.

• Si $a > b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$.

Dans les deux cas, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$.

∗ **2$^{\text{e}}$ cas :** f est **décroissante** sur I

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant 0$

Retenir

• Le taux de variation d'une fonction croissante sur un intervalle est toujours positif ou nul.

• Le taux de variation d'une fonction décroissante sur un intervalle est toujours négatif ou nul.

4°) Précision

L'énoncé encadré n'est pas très rigoureux.
Il faudrait le quantifier et parler de la réciproque.

On retiendra l'énoncé suivant.

• Une fonction est croissante sur un intervalle I si et seulement si son taux de variation entre deux réels quelconques distincts dans I est positif ou nul.

• Une fonction est décroissante sur un intervalle I si et seulement si son taux de variation entre deux réels quelconques distincts dans I est négatif ou nul.

II. Lien entre signe de la dérivée et sens de variation

1°) Signe de la dérivée d'une fonction monotone

f est une fonction définie, dérivable et monotone sur un intervalle I.
$x \in$ I fixé

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\text{taux de variation de } f \text{ entre } x \text{ et } x+h} \quad \text{(définition)}$$

2 cas

f est croissante sur I

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$$

$$f'(x) \geqslant 0$$

f est décroissante sur I

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0$$

$$f'(x) \leqslant 0$$

2°) Principe de LAGRANGE pour la monotonie

Joseph-Louis LAGRANGE : mathématicien français (1749-1827)

Nous admettrons sans démonstration la réciproque du résultat du 1°).

> ***f* est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.**
>
> **• Si pour tout $x \in \mathrm{I}$ $f'(x) \geqslant 0$, alors *f* est croissante sur I.**
>
> **• Si pour tout $x \in \mathrm{I}$ $f'(x) \leqslant 0$, alors *f* est décroissante sur I.**
>
> **• Si pour tout $x \in \mathrm{I}$ $f'(x) = 0$, alors *f* est constante sur I.**

On peut donc dire que le signe de la dérivée donne le sens de variation de *f*.

Pour étudier le signe de la dérivée, on va pouvoir utiliser un tableau de signes.
Ceci entraîne que l'on doive donner la dérivée sous une forme qui permet d'étudier facilement son signe.

Schéma :

$$\begin{array}{ccc} f & \longrightarrow & f' \\ & & \downarrow \\ \text{Variations de } f & \longleftarrow & \text{Signe de } f' \end{array}$$

Fonction (primitive)

↓

Dérivée (signe)

↓

Fonction de départ (variations)

Les dérivées constituent un nouveau moyen d'étude, plus puissant que les moyens antérieurs tels que composées, opérations algébriques ou étude directe.

3°) Règle pour la stricte monotonie (admise sans démonstration)

> ***f* est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.**
>
> **• Si *f* ' est strictement positive sauf éventuellement en des réels isolés où la fonction dérivée est nulle, alors *f* est strictement croissante sur I.**
>
> **• Si *f* ' est strictement négative sauf éventuellement en des réels isolés où la fonction dérivée est nulle, alors *f* est strictement décroissante sur I.**

III. Exemples d'étude de sens de variation

1°) Exemple 1

$f : x \mapsto x^2 - 2x + 5$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x - 2$

$2x - 2$ est une expression du type $ax + b$.

Valeur charnière :
$2x - 2 = 0$
$x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		–	0	+	
Variations de *f*		↘	4	↗	

Calcul du minimum global

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 2 \times 1 + 5 \\ &= 4 \end{aligned}$$

On ne descend pas les barres simples sur la dernière ligne.

Phrases :

La fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$.
La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

2°) Exemple 2

$f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x^2 - 1) \\ &= 3(x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

$x + 1 = 0$ | $x - 1 = 0$
$x = -1$ | $x = 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f\,'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Calcul des extremums locaux

$f(1) = -1$
$f(-1) = 3$

Phrases

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$ et sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

3°) Exemple 3

$f : x \mapsto \dfrac{2x+5}{x+3}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ car c'est une fonction rationnelle (c'est même une fonction homographique).

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad f\,'(x) = \frac{2(x+3) - 1(2x+5)}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{1}{(x+3)^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $(x+3)^2$		$+$	0 déno	$+$	
Signe de $f\,'(x)$		$+$	||	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	||	$\nearrow$	

N.B. :

On descend la double barre pour la valeur interdite jusque sur la dernière ligne.

Phrases :

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-3[$ et sur l'intervalle $]-3\ \ +\infty[$.
Attention : ne pas mettre $]-\infty\,;-3[\, \cup\,]-3\,;+\infty[$.

Comme il y a une valeur interdite, la courbe de f sera en deux parties séparées par une droite.

On ne calcule pas $f(-3)$ car $-3 \notin \mathcal{D}_f$.

IV. Quelques commentaires généraux

1°) Liens avec les méthodes antérieures

On comprend pourquoi :
- on a étudié les dérivées ;
- on a travaillé les études de signes.

Par exemple, pour étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x}{x^2+x+1}$, on ne sait pas faire en composée mais on va savoir le faire en dérivée.

2°) Fonctions étudiées

Cette année, nous étudierons surtout des fonctions polynômes et rationnelles.

Nous étudierons également quelques fonctions avec des racines carrées et, plus tard, quelques fonctions trigonométriques.

Rappels :

Fonction rationnelle : quotient de deux fonctions polynômes (celui du dénominateur étant non nul).

Fonction homographique : quotient de deux fonctions affines (celle du dénominateur étant non nulle).

Les fonctions affines sont des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
Donc les fonctions homographiques sont des fonctions rationnelles particulières.

Des fonctions avec des racines carrées, des valeurs absolues, des cosinus ou des sinus ne sont pas des fonctions rationnelles (à priori, ce sont des fonctions qui ne portent pas de noms).

3°) Rédaction

Les mots qui marchent ensemble :

On doit toujours préciser **« fonction croissante sur … »**, **« fonction décroissante sur …»**, **« fonction monotone sur …» (et non pas croissante tout court)**.

On parle d'ailleurs toujours de fonction croissante ou décroissante sur un intervalle et non sur une réunion d'intervalles.

On doit toujours dire **« minimum de la fonction sur … »**, **« maximum de la fonction sur … »**, **« extremum de la fonction sur … »**.

V. Compléments sur les tableaux de variations (tableaux récapitulatifs)

1°) Les barres

On ne descend pas les barres simples sur la dernière ligne mais on descend les doubles barres qui correspondent aux valeurs interdites sur la dernière ligne.

Les doubles barres sont infranchissables (comme sur la route pour les lignes continues ; on peut perdre des points en les franchissant !).

Les doubles barres interviennent dans le tableau récapitulatif sur la ligne « Signe de $f'(x)$ » et sur la ligne « Variations de *f* ».

S'il y a une double barre sur la ligne « Signe de $f'(x)$ », il n'y a pas automatiquement une double barre sur la ligne « Variations de *f* ».

Les doubles barres correspondent à l'ensemble de définition de la fonction f (et à l'ensemble de dérivabilité de *f*).

La courbe peut être en plusieurs morceaux.

2°) Extremums

Le tableau de variations d'une fonction permet de connaître les **extremums locaux et globaux** de cette fonction.

Un **extremum local** est un extremum de la fonction sur un plus petit intervalle que l'ensemble de définition.

Une remarque importante : un maximum local peut-être plus petit qu'un minimum local comme le montre le tableau suivant.

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
Variations de f		↗	-3	↘	‖	↘	5	↗	

3°) Les flèches de variations

Les flèches de variations expriment que la fonction est strictement croissante ou strictement décroissante, plus une autre propriété de la fonction qui sera vue en Terminale.

Conventions

Une flèche dans le tableau de variation d'une fonction *f* indiquera dorénavant :

- la stricte croissante ou décroissance de *f* sur l'intervalle correspondant ;

- la « continuité » (ou absence de rupture) de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur cet intervalle.

La continuité est toujours vérifiée pour une fonction dérivable.

Les variations doivent être exprimées intervalle par intervalle.
On ne peut exprimer les variations sur une réunion d'intervalles.

4°) Tableau d'une fonction sur un intervalle inclus dans l'ensemble de définition

Exemple :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

Voici le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]1\ ;+\infty[$.

x	1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	
Variation de f	‖	↘	

Observer comment est mise la double barre.
Il est possible de faire le tableau de variations de la fonction sur le domaine tout entier puis de se restreindre ensuite à l'intervalle demandé.

VI. Tracés de courbes

1°) Exemple

$f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$

Tableau de variations (cf. **III. 2°)**)

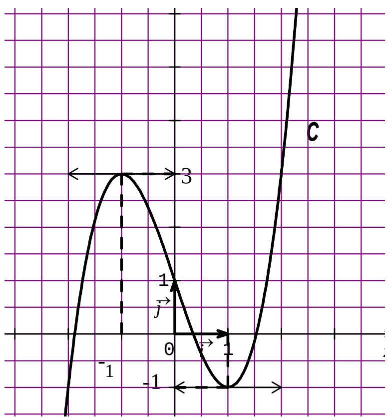
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de f	↗		3	↘	-1	↗	

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

$f'(1) = f'(-1) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses -1 et 1.

On commence par tracer les points de coordonnées (1 ; – 1) et (– 1 ; 3) et les tangentes.



2°) Premières règles de tracé des courbes

• On commence par tracer les tangentes horizontales ($f'(a) = 0$) avec les pointillés et les valeurs sur les axes sous la forme d'une **double flèche** $\longleftrightarrow$.

• On utilise ensuite le tableau de variation et éventuellement un tableau de valeurs pour placer quelques points.

Vérification sur calculatrice graphique ou sur ordinateur.
Attention : la calculatrice graphique ne trace pas les tangentes tout court.
Quand il y a des valeurs interdites, la courbe est en plusieurs parties séparées par des droites (on étudiera ces droites plus tard).

VII. Extremums

1°) Utilisation de tableaux de variation

Nous avons déjà dit que le tableau de variations d'une fonction permet de connaître les extremums locaux et globaux de cette fonction.

On appelait autrefois ce problème : le *problème des extrema*.

2°) Application aux problèmes d'optimisation

On utilise une fonction pour modéliser un problème (économique, géométrique…).

Cette année nous étudierons avant tout des problèmes d'optimisation dans des situations géométriques du plan ou de l'espace : on s'intéressera à une grandeur géométrique (longueur, périmètre, aire, volume, angle) dont on cherchera le maximum ou le minimum.

On cherche le maximum ou le minimum global (et pas local !) d'une fonction.

(Voir exercices).

On peut rappeler le titre l'ouvrage de Leibniz daté de 1684 : Nouvelle méthode pour chercher les maxima et les minima.

Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantites moratur et singulare pro illis calculi genus. Acta Eruditorum. Octobre 1684.

Nouvelle méthode pour chercher les maxima et les minima, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les expressions les expressions fractionnaires ou irrationnelles, accompagnées du calcul original qui s'y applique. 1684.

Cf. site IREM