TS1

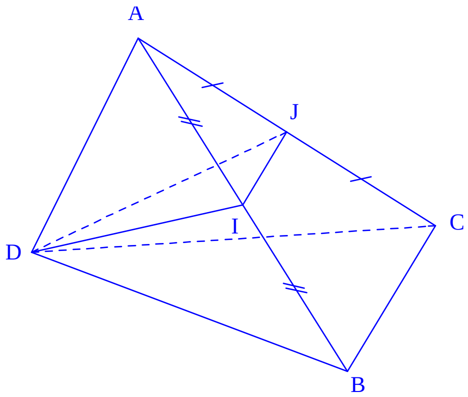
Contrôle du mardi 18-11-2014 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (6 points : 2 points pour la construction ; 4 points pour la justification)

Soit ABCD un tétraèdre. On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC].
Tracer sur la figure l'intersection des plans (DIJ) et (BCD). Ce tracé sera justifié par un théorème énoncé avec précision.



……

……

……

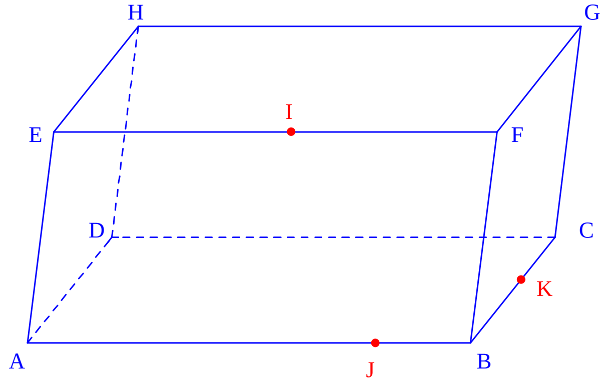
……

……

……

II. (4 points)

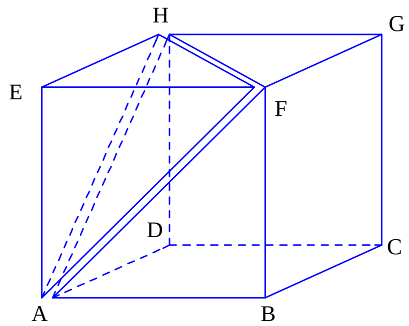
Soit ABCDEFGH un parallélépipède.
Les points I, J, K appartiennent respectivement aux arêtes [EF], [AB] et [BC].
Tracer la section du parallélépipède par le plan (IJK).
Laisser les traits de construction apparents ; nommer les points de construction.



III. (4 points : 2 points pour le 1°) ; 1 point pour le 2°) ; 1 point pour le 3°))

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.

1°) Exprimer le volume du tétraèdre AEFH en fonction de a.
2°) Exprimer l'aire du triangle AFH en fonction de a.
3°) En déduire la longueur de la hauteur issue de E dans le tétraèdre AEFH en fonction de a.



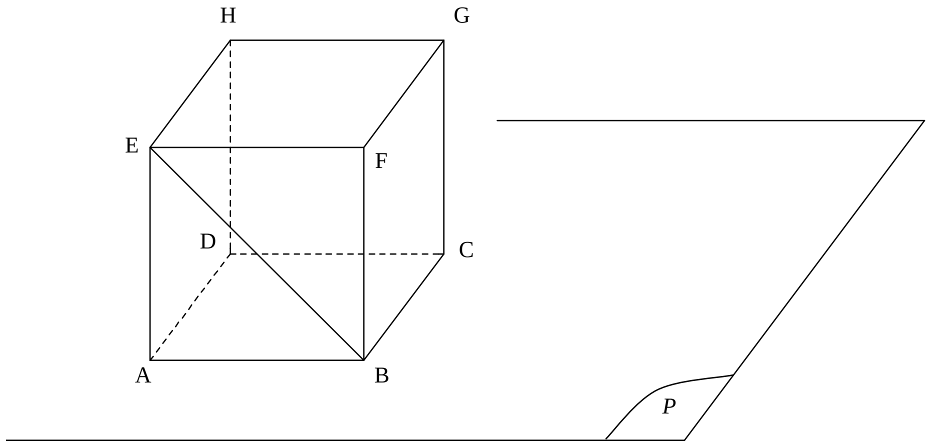
Ne rien écrire sur la figure

1°) …………………………. 2°) …………………………. 3°) ………………………….

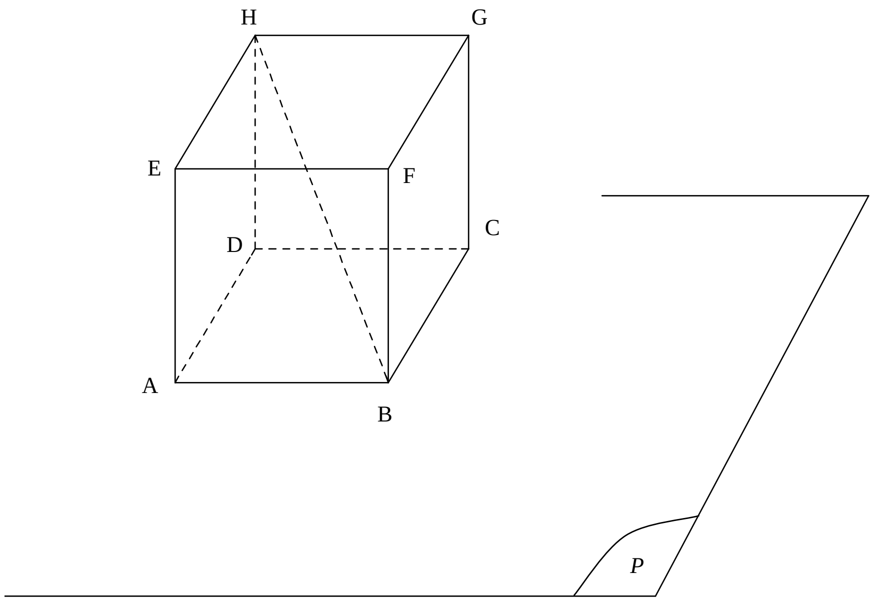
IV. (4 points)

On considère un cube ABCDEFGH dont la face ABCD est posée sur un plan P.
Il est éclairé par une source lumineuse très éloignée.

1°) Les rayons lumineux sont parallèles à (BE).
Construire l'ombre portée du cube sur le plan *P*.

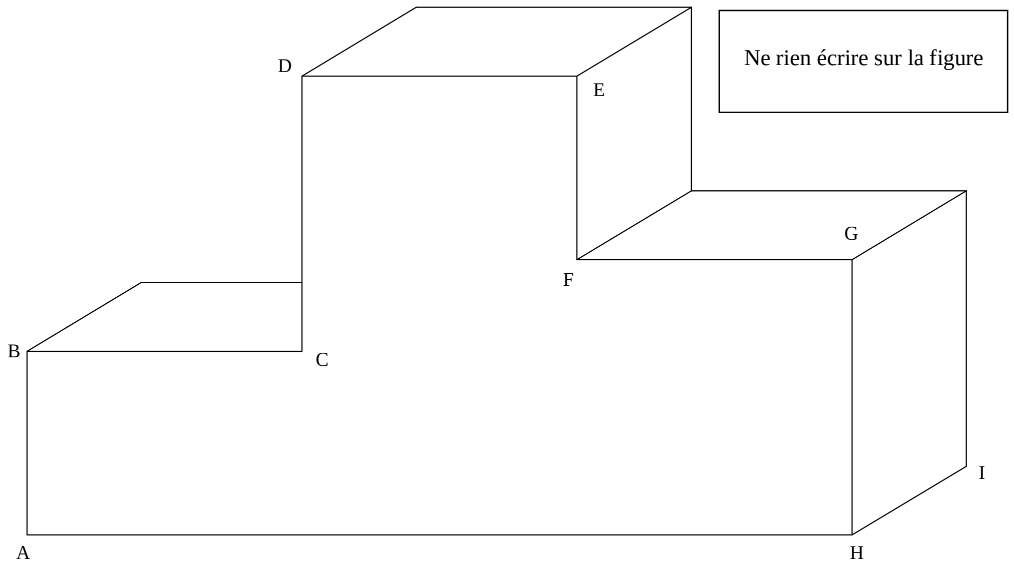


2°) Les rayons lumineux sont parallèles à (BH).
Construire l'ombre portée du cube sur le plan *P*.

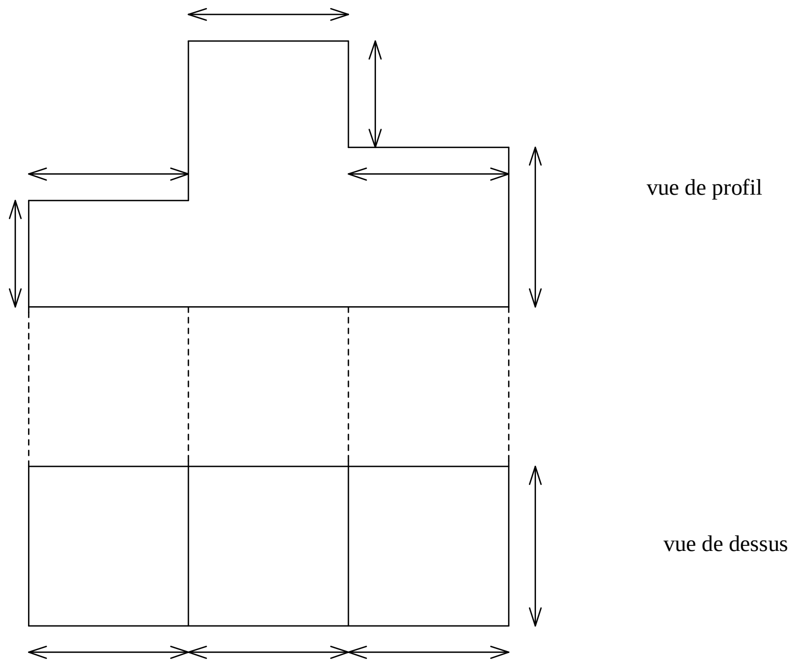


V. (2 points)

Un podium est formé par l'assemblage de trois pavés droits. Il est représenté sur la figure ci-contre en perspective parallèle.
Les longueurs CD et GH sont égale à 60 cm, la longueur AB est égale à 40 cm, les longueurs BC, DE, FG sont égales, la longueur AH est égale à 180 cm, la longueur HI est égale à 60 cm.

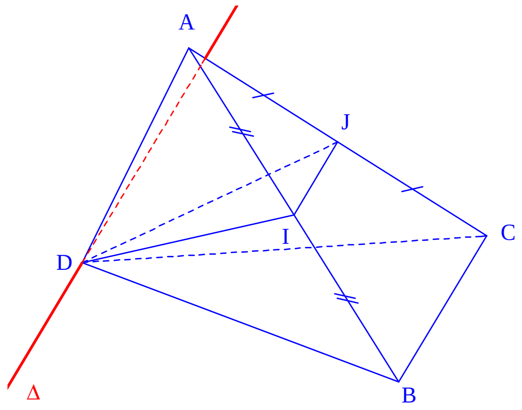


Le schéma suivant représente la vue de profil et la vue de dessus du podium.
Compléter les vues suivantes du podium en indiquant les dimensions sur les vues de profil et vue de dessus.



Corrigé du contrôle du 18-11-2014

I. Tracé de la droite d'intersection de deux plans sécants



Les plans (BCD) et (IJD) ont le point D en commun et ne sont pas confondus donc ils sont sécants selon une droite Δ passant par D.

I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC], donc d'après le théorème des milieux dans le triangle ABC,
(IJ) // (BC).

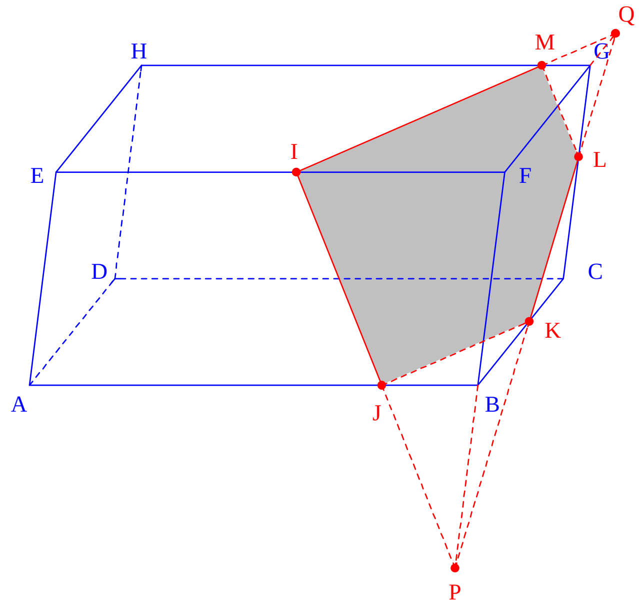
Or (IJ) $\subset$ (DIJ) et (BC) $\subset$ (DIJ).
Donc d'après le théorème du toit, les plans (BCD) et (IJD) se coupent selon la droite Δ passant par D et parallèle à (BC).

● On trace en pointillés la partie de la droite Δ qui est cachée.

● En revanche, il n'y a pas besoin de tracer de « petites équerres » pour montrer les droites parallèles comme me l'ont fait de nombreux élèves.

II. Section d'un parallélépipède par un plan

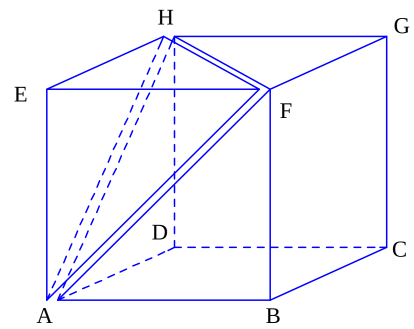
La meilleure méthode est la méthode de tracé hors solide.



On utilise des pointillés pour les segments cachés.

La section est le pentagone IJKLM.

III.



1°) $\mathscr{V}_{\text{AEFH}} = \dfrac{a^3}{6}$

2°) $\mathscr{A}_{\text{AFH}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

3°) $h = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Cet exercice n'a pas été bien réussi par de nombreux élèves.
La difficulté principale a été dans le calcul du volume du tétraèdre trirectangle auquel les élèves n'ont manifestement jamais été habitués. Il est vrai qu'au collège on calcule essentiellement des volumes de pyramides régulières, le plus souvent à base carrée.
Le terme lui-même de tétraèdre fait que certains élèves n'ont pas pensé qu'il s'agissait d'une pyramide.

1°) On applique la formule du volume d'une pyramide (un tétraèdre est une pyramide à 4 faces).
Ici, il s'agit d'un tétraèdre trirectangle : les droites (EA), (EF) et (EH) sont deux à deux orthogonales.
Pour calculer le volume, on a trois choix possibles pour la base : on peut prendre n'importe lequel des triangles AEF, EFH, AEH.

$$\mathscr{V}_{\text{AEFH}} = \frac{\mathscr{A}_{\text{EFH}} \times \text{AE}}{3} = \frac{\frac{a \times a}{2} \times a}{3} = \frac{\frac{a^3}{2}}{3} = \frac{a^3}{6}$$

2°) Le triangle AFH est un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{2}$ (on établit très facilement ce résultat).

On doit donc calculer l'aire d'un triangle équilatéral.

Pour cela, il y a deux moyens possibles :

a) On calcule la hauteur du triangle équilatéral à l'aide du théorème de Pythagore. Rappelons cependant la formule qu'il est intéressant de retenir : la hauteur d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Donc les hauteurs du triangle AFH ont toutes pour longueur $\frac{a\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$$\mathscr{A}_{\text{AFH}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2} \times a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Beaucoup d'élèves se sont trompés, ils ont cru que le triangle AFH était équilatéral.

b) On applique la formule de l'aire d'un triangle vue en 1ère : $\mathscr{A} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{\text{A}}$.

$$\mathscr{A}_{\text{AFH}} = \frac{1}{2} \times a\sqrt{2} \times a\sqrt{2} \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

(On rappelle que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.)

3°) On note h la hauteur issue de E dans le tétraèdre AEFH.

D'après la formule du volume d'une pyramide, on a : $\mathscr{V}_{\text{AEFH}} = \frac{\mathscr{A}_{\text{AFH}} \times h}{3}$.

On a donc $\frac{a^3}{6} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \times h}{3}$ d'où $\frac{a^3}{6} = \frac{a^2\sqrt{3} \times h}{6}$.

On en déduit que $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

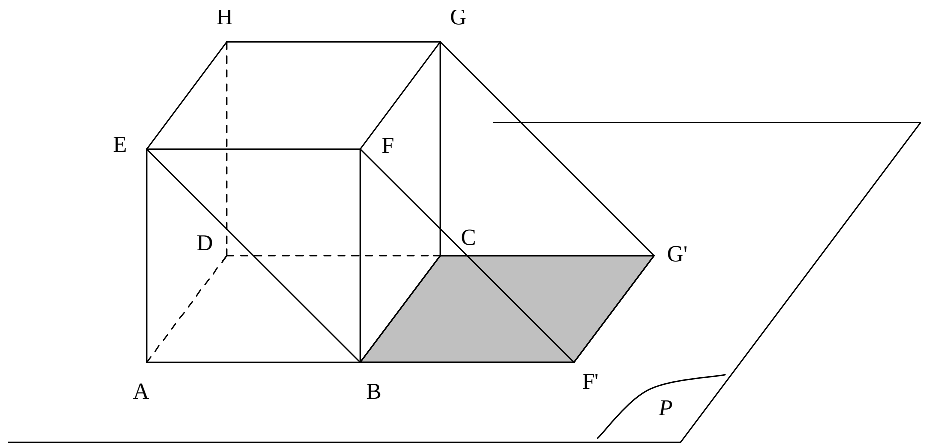
On vérifie que tous les résultats sont homogènes à un volume, une aire, une longueur (simple analyse dimensionnelle comme en physique).

IV. Représentations d'ombres au soleil d'un cube en perspective cavalière

Cet exercice a été généralement bien réussi alors qu'il n'en avait jamais été fait de similaire en classe.
Le 2°) a cependant été légèrement moins bien réussi que le 1°).
Sur chaque faire, on fait apparaître les constructions des ombres en traçant les rayons (on peut me mettre des flèches sur les rayons).

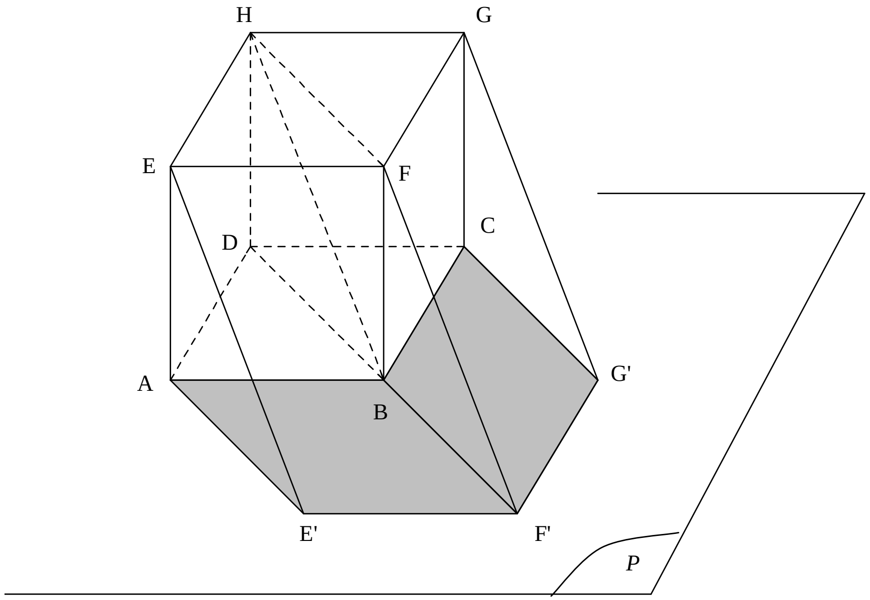
Tous les rayons lumineux ont la même direction.

1°)



Il faut trouver les intersections avec *P* des parallèles à (EB) passant par les sommets du cube avec le plan *P*.
Soit F' l'ombre de F : le quadrilatère EBF'F est un parallélogramme, d'où la construction de F'.
On procédera de même pour obtenir G', ombre de G.
L'ombre portée est le carré BF'G'C colorié.

2°)



Il faut trouver les intersections des parallèles à (BH) passant par les sommets du cube avec le plan *P*.
Soit F' l'ombre de F : le quadrilatère BHFF' est un parallélogramme, d'où la construction de F'.
On procédera de même pour obtenir E' et G', ombres respectives de E et G.
L'ombre portée est un hexagone ABCG'F'E' colorié.

Question supplémentaire que j'avais pensé mettre en bonus :

Calculer l'aire de l'ombre portée (dans la réalité) en fonction de l'arête *a* du cube.

V. Lecture de vues de profil et de dessus

On peut remarquer que la représentation du podium n'est pas une vraie représentation en perspective cavalière car il manque les pointillés.