Exercices sur les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x = 3$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{\text{ch}\, x - 2}{\text{ch}\, x + 4} < \dfrac{\text{ch}\, x - 3}{\text{ch}\, x + 2}$.

3 **Partie A**

Démontrer que, pour tout couple $(x\,;y)$ de réels, on a les égalités suivantes :

$$\text{sh}\, x + \text{sh}\, y = 2\ \text{sh}\frac{x+y}{2}\ \text{ch}\frac{x-y}{2}$$

$$\text{sh}\, x - \text{sh}\, y = 2\ \text{ch}\frac{x+y}{2}\ \text{sh}\frac{x-y}{2}$$

$$\text{ch}\, x + \text{ch}\, y = 2\ \text{ch}\frac{x+y}{2}\ \text{ch}\frac{x-y}{2}$$

$$\text{ch}\, x - \text{ch}\, y = 2\ \text{sh}\frac{x+y}{2}\ \text{sh}\frac{x-y}{2}.$$

Partie B

1°) Soit x un réel non nul et n un entier naturel non nul.

Donner une expression simplifiée du produit $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \text{ch}\dfrac{x}{2^k}$.

Indication : utiliser la relation $\text{ch}\, t = \dfrac{\text{sh}\, 2t}{2\text{sh}\, t}$ pour t réel quelconque non nul.

2°) Soit x et y deux réels tels que $x \neq y$ et n un entier naturel non nul.

Donner une expression simplifiée du produit $Q_n(x\,;y) = \prod_{k=1}^{n}\left(\text{ch}\dfrac{x}{2^k} + \text{ch}\dfrac{y}{2^k}\right)$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation 2 sh x + ch x = 5.

5 Soit α et β deux réels tels que $\alpha^2 - \beta^2 = 1$.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} \text{ch}\, x + \text{ch}\, y = 2\alpha \\ \text{sh}\, x + \text{sh}\, y = 2\beta \end{cases}$.

Indication :
Élever chaque équation au carré et soustraire membre à membre.
Démontrer qu'alors $x = y$.
Faire une discussion sur α et β.

6 Soit x un réel.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel k on a : $\text{th}\big((k+1)x\big) - \text{th}\, kx = \dfrac{\text{sh}\, x}{\text{ch}(kx)\,\text{ch}\big((k+1)x\big)}$.

2°) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\text{ch}(kx)\,\text{ch}\big((k+1)x\big)}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Solutions

$\boxed{1}$ $S=\left\{\ln\left(1+\sqrt{2}\right);-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$

$\boxed{2}$ $\text{ch}\,x>8$

$\boxed{3}$ **Partie B**

1°) $P_n(x)=\dfrac{\text{sh}\,x}{2^n\text{sh}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$

2°) $Q_n(x,y)=\dfrac{\text{sh}^2(x+y)}{2^{n-2}\ \text{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\text{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)}=\dfrac{\text{sh}^2(x+y)}{2^{n-2}\left[\text{ch}\left(\dfrac{x}{2^{n-1}}\right)-\text{ch}\left(\dfrac{y}{2^{n-1}}\right)\right]}$

$\boxed{5}$ $\text{ch}\,x=\alpha$ et $\text{sh}\,x=\beta$.
Si $\alpha<1$, alors il n'y a aucune solution.
Si $\alpha=1,\ldots$
Si $\alpha>1$, $x=y=\text{Argsh}\,\beta$

Questions de cours

$\boxed{1}$ Étude des fonctions ch et Argch.

$\boxed{2}$ Étude des fonctions sh et Argsh.

$\boxed{3}$ Étude des fonctions th et Argth.

$\boxed{4}$ Étude des fonctions ch et sh.

$\boxed{5}$ Expression logarithmique de Argch, Argsh, Argth.

$\boxed{6}$ Formules de trigonométrie hyperbolique.

$\boxed{7}$ Démontrer à l'aide de la définition de la fonction ch que $\forall\, x\in\mathbb{R}$ $\text{ch}\,x\geqslant 1$.

$\boxed{8}$ Démontrer que $\forall\, x\in\mathbb{R}$ $-\text{ch}\,x<\text{sh}\,x<\text{ch}\,x$.
En déduire un encadrement de th x.

$\boxed{9}$ Déterminer le sens de variation de la fonction th sans utiliser la dérivée.