Exercices sur les fonctions trigonométriques réciproques

1 On considère la fonction f définie par $f(x)=\text{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2°) Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x\in\mathcal{D}$.

Indication : Poser $y=\text{Arccos}\,x$.

2 Soit f la fonction définie par $f(x)=\text{Arctan}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

1°) Peut-on prolonger f par continuité ?
2°) Simplifier l'expression de f.

Indication : Poser $y=\text{Arctan}\,x$.

Contrôler sur la calculatrice graphique.

3 **Question préliminaire :** Simplifier $\cos(\text{Arcsin}\,x)$ pour $x\in[-1\,;1]$.

La calculatrice est autorisée.

L'objectif de cet exercice est de calculer $\text{Arcsin}\dfrac{5}{13}+\text{Arcsin}\dfrac{4}{5}+\text{Arcsin}\dfrac{16}{65}$.

Indications :

Poser $\alpha=\text{Arcsin}\dfrac{5}{13}$, $\beta=\text{Arcsin}\dfrac{4}{5}$ et $\gamma=\text{Arcsin}\dfrac{16}{65}$.

- Démontrer que $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$. On pourra comparer α et β à des valeurs remarquables de Arcsin.
- Calculer $\cos(\alpha+\beta)$.
- Conclure.

4 On considère la fonction f définie par $f(x)=\text{Arccos}(1-x)$.

1°) Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'ensemble de définition de f, on a $f(x)=2\text{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

5 **Question préliminaire :** Simplifier Arccos(cos x) pour $x\in[0\,;\pi]$ puis pour $x\in[\pi\,;2\pi]$.

Partie A

On considère la fonction $f : x\mapsto \text{Arccos}\left(2x^2-1\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2°) Simplifier $f(x)$ (**méthode :** changement de variable)

Partie B

Mêmes questions avec la fonction $g : x\mapsto\text{Arccos}\left(4x^3-3x\right)$.

6

7 1°) Étudier la fonction $f : x\mapsto\text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}\,x+\text{Arctan}(x+1)$ (parité, sens de variation et limites).
En déduire le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}\,x+\text{Arctan}(x+1)=m$ (E) suivant la valeur du réel m.

2°) a) Rappeler sans démonstration la formule donnant $\tan(a+b)$ où a et b sont deux réels tels que a, b, $a+b$ ne soient pas de la forme $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, avec k entier relatif.

b) Rappeler sans démonstration la formule donnant $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)$ où a est un réel qui n'est pas de la forme $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, avec k entier relatif.

c) Résoudre l'équation (E) pour $m=\dfrac{\pi}{2}$.

8 **Partie A (Questions préliminaires)**

1°) Rappeler la formule donnant $\tan(a+b)$.

2°) Simplifier $\text{Arctan}\,(\tan x)$ pour $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ puis pour $x\in\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x)=\text{Arctan}\dfrac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2°) Pour $x\in\mathcal{D}$, simplifier l'écriture de $f(x)$.

9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\text{Arctan}(x+1)-\text{Arctan}\,x$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $0<f(x)<\dfrac{\pi}{2}$.

2°) Démontrer qu'il existe une unique fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait :
$f(x)=\text{Arctan}\,g(x)$.

3°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\text{Arctan}\,g(k)$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

10 Le but de l'exercice est de calculer $\alpha=\text{Arctan}\dfrac{1}{2}+\text{Arctan}\dfrac{1}{3}$ **par deux méthodes indépendantes**.

1ère méthode :

- Rappeler la formule donnant $\tan(a+b)$.
- Démontrer que l'on a : $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.
- Effectuer le calcul demandé.

2e méthode :

On considère la fonction $f : x\mapsto\text{Arctan}\dfrac{1}{x+1}+\text{Arctan}\dfrac{x}{x+2}$.

Calculer $f'(x)$.
Conclure.

11 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases}\text{Arcsin } y = 2\text{Arcsin } x \\ 2\text{Arccos } y = \text{Arcsin } x\end{cases}$.

12 Démontrer que pour tout réel x, on a : $\cos(\text{Arctan } x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\text{Arctan } x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

13 1°) Simplifier Arc(cos x) pour $x \in [0\,;\pi]$, puis pour $x \in [-\pi\,;0]$.

Simplifier Arc(sin x) pour $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ et $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2°) Simplifier $\text{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ et simplifier $\text{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

14 Démontrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\text{Arctan}\left[\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right] - 2\text{Arctan } x = -\dfrac{\pi}{2}$.

15 Démontrer que : $\dfrac{\pi}{4} = 2\text{Arctan}\dfrac{1}{3} - \text{Arctan}\dfrac{1}{7}$.

16 **Question préliminaire :** rappeler la formule donnant $\tan(a-b)$ où a et b sont deux réels tels que a, b, $a+b$ soient différents de $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, pour tout entier relatif k.

Soit x_1, , x_2, …, x_7 sept réels deux à deux distincts.

Démontrer qu'il existe deux réels distincts x_i et x_j tels que $0 < \dfrac{x_j - x_i}{1+x_i x_j} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Indication : On pourra supposer que $x_1 < x_2 < ... < x_7$ et on pourra poser $\theta_i = \text{Arctan } x_i$.

17 Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2\text{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \text{Arctan } x$.

18 Pour tout entier naturel m non nul, on note $\mathcal{C}_m$ l'ensemble des couples (x ; y) de réels non nuls tels que $m\text{Arctan}\dfrac{1}{x} + \text{Arctan}\dfrac{1}{y} \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.

1°) Démontrer que pour tout réel x non nul on a : $\text{Arg}(x+\mathrm{i}) \equiv \text{Arctan}\dfrac{1}{x}\ [\pi]$.

2°) Démontrer que $(x\,;y) \in \mathcal{C}_m \Leftrightarrow (x+\mathrm{i})^m (y+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \in \mathbb{R}$.

3°) Démontrer que : $2\text{Arctan}\dfrac{1}{3} - \text{Arctan}\dfrac{1}{7} = \dfrac{\pi}{4}$.

19 Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto$ Arctan(Arctan x).

20 Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$.

Indication : on pourra écrire $f(x) = \dfrac{x}{1+\left(x^2\right)^2}$.

21 Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\sqrt{x^2-1}\right)$.

22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$\text{Arcsin } x + \text{Arcsin } \sqrt{1+x^2} = \dfrac{\pi}{2}$ (1) ; $2\text{Arcsin } x = \text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ (2).

23 Simplifier les expressions suivantes : $\text{Arccos}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$ et $\text{Arcsin}\left(\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

24 On considère la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$.

Pour cet exercice, on donne : $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ et $\tan\dfrac{3\pi}{8} = \sqrt{2}+1$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2°) Démontrer que l'on a :

$f(x) = 2\text{Arctan } x + \dfrac{5\pi}{4}$ si $x < -\sqrt{2}-1$;

$f(x) = 2\text{Arctan } x + \dfrac{\pi}{4}$ si $-\sqrt{2}-1 < x < \sqrt{2}-1$;

$f(x) = 2\text{Arctan } x - \dfrac{3\pi}{4}$ si $x > \sqrt{2}-1$.

25 On considère la fonction $f : x \mapsto x\text{Arccos } x$.

1°) Démontrer que $f\,'$ s'annule en un unique réel α et justifier que $0 < \alpha < 1$.
2°) Dresser le tableau de variations de f.

3°) Démontrer que le maximum de f est égal à $\dfrac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

26 1°) Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[-1\,;1]$.

Préciser en fonction de Arccos x l'ensemble des réels $u \in [-\pi\,;\pi]$ tels que $\cos u > x$.

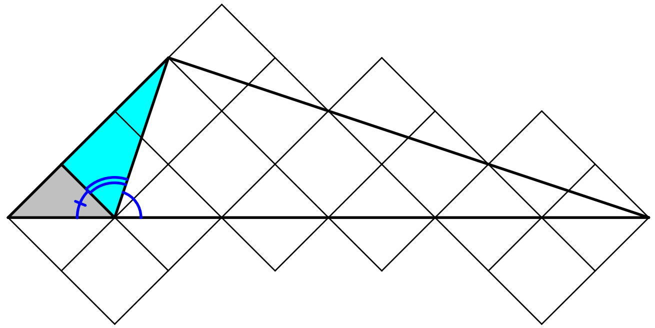
2°) Soit y un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

Préciser en fonction de Arcsin y l'ensemble des réels $u \in [-\pi\,;\pi]$ tels que $\sin u < y$.

27 Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]-1\,;1[$.

Exprimer $\text{Arcsin}\dfrac{2x}{1+x^2}$ en fonction de Arctan x.

$\boxed{28}$ Deviner la valeur de $\text{Arctan}\,1+\text{Arctan}\,2+\text{Arctan}\,3$ à l'aide de la figure ci-dessous, puis démontrer cette conjecture.



$\boxed{29}$ Démontrer que pour tout réel $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$.

$\boxed{30}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\text{Arctan}\,\frac{1}{2x^2}+\text{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

Calculer $f'(x)$. Que peut-on en déduire ?

$\boxed{31}$

$\boxed{32}$ On considère deux réels α et β de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\tan\alpha=0{,}6$ et $\tan\beta=0{,}25$.

1°) Marquer α et β avec précision sur le cercle trigonométrique.
2°) On pose $\gamma=\alpha+\beta$.
Calculer $\tan\gamma$; en déduire γ.

$\boxed{33}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{Arccos}(\cos x)=\frac{\pi}{3}$.

$\boxed{34}$

Question préliminaire :

Rappeler sans démonstration la formule pour $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et de $\tan b$ où a et b sont deux réels tels que a, b, $a+b$ ne soient pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$, avec k entier relatif.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\text{Arctan}\,x+\text{Arctan}\,2x=\frac{\pi}{4}\quad(1)$; $\text{Arcsin}\,2x+\text{Arcsin}\,x=\frac{\pi}{4}\quad(2)$.

Indications pour l'équation (1) :
Deux méthodes indépendantes.

1[ère] méthode :

Étudier la fonction correspondant au premier membre de l'équation (variations et limites) pour démontrer que l'équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. Déterminer le signe de cette solution puis la déterminer en raisonnant par implications.

2[e] méthode :

Raisonner par équivalences :

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\text{Arctan}\,x\right) & \boxed{a}\\ -\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\text{Arctan}\,x<\frac{\pi}{2} & \boxed{b}\end{cases}$$

$\boxed{34}$ Calculer le produit $(1+2\text{i})(1+5\text{i})(1+8\text{i})$; en déduire la valeur de $S=\text{Arctan}\,2+\text{Arctan}\,5+\text{Arctan}\,8$.

$\boxed{35}$ Calculer $\frac{(5+\text{i})^4}{239+\text{i}}$; en déduire la formule de Machin : $\frac{\pi}{4}=4\text{Arctan}\,\frac{1}{5}-\text{Arctan}\,\frac{1}{239}$.

Note historique : Grâce à cette formule qu'il découvrit en 1706, le mathématicien John Machin (1680-1752) calcula les 100 premières décimales de π.

En 1974, la formule $\frac{\pi}{4}=12\text{Arctan}\,\frac{1}{18}+8\text{Arctan}\,\frac{1}{57}-5\text{Arctan}\,\frac{1}{239}$ (variante de la formule de Machin due à Gauss qui se démontre de la même manière en utilisant de plus l'inégalité $0\leqslant\text{Arctan}\,x\leqslant x$ pour tout réel $x\geqslant0$), permit d'obtenir un million de décimales pour π en utilisant un ordinateur.

$\boxed{36}$ Calculer $(1+\text{i})(239+\text{i})$ et $(5+\text{i})^4$. En déduire la formule de Machin : $\frac{\pi}{4}=4\text{Arctan}\,\frac{1}{5}-\text{Arctan}\,\frac{1}{239}$.

$\boxed{37}$ Calculer $S=\text{Arctan}\,5+\text{Arctan}\,8-\text{Arctan}\,3$.

38

Partie A

1°) Rappeler la relation entre $\text{Arctan}\, x$ et $\text{Arctan}\,\dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

2°) Rappeler $\tan(x+y)$.

Partie B

Soit a et b deux réels tels que $ab \neq 1$.
On pose $S = \text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b$.
1°) Calculer $\tan S$.
2°) On suppose dans tout le 2°) que $ab < 1$.
a) On suppose de plus que $a > 0$.
Démontrer en écrivant $b < \dfrac{1}{a}$ que $-\dfrac{\pi}{2} < S < \dfrac{\pi}{2}$. En déduire que $S = \text{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab}$.
b) On suppose maintenant que $a < 0$. Démontrer le même résultat.
c) Vérifier que le résultat précédent reste valable lorsque $a = 0$.
3°) On suppose dans tout le 3°) que $ab > 1$.
a) Justifier que a et b sont de même signe.
b) On suppose que a et b sont positifs.
Démontrer que $\dfrac{\pi}{2} < S < \pi$. En déduire que $S = \text{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab} + \pi$.
c) On suppose ici que a et b sont négatifs.
Démontrer que $-\pi < S < -\dfrac{\pi}{2}$. En déduire que $S = \text{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab} - \pi$.

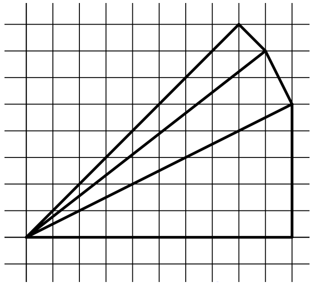
<u>Bilan</u> :

Si $ab < 1$, alors $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab}$.

Si $ab > 1$, alors $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab} + \pi\,\text{sgn}\, a$.

Partie C

1°) Calculer $\text{A} = \text{Arctan}\,\dfrac{1}{2} + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{5} + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{8}$.
2°) Que démontre cette figure ?



39 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \text{Arctan}\,\dfrac{x+1}{x}$ et $f(0) = -\dfrac{\pi}{2}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative de f.

1°) Étudier les limites de f à droite et à gauche. f est-elle continue en 0 ?
2°) a) f est-elle dérivable à gauche en 0 ?
b) Démontrer que f est dérivable en droite en 0 ; préciser la valeur de $f'_d(0)$ et l'équation de la demi-tangente T à $\mathcal{C}$ au point $\text{A}\left(0\,;-\dfrac{\pi}{2}\right)$.
2°) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
Donner le tableau de variation de f et préciser les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3°) La courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle une ou plusieurs asymptotes ? Si oui, en donner une équation et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à l'asymptote.
4°) a) Démontrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J que l'on précisera.
On appelle g sa bijection réciproque.
b) Démontrer que g est dérivable en $b = 1 - \text{Arctan}\, 2$ et calculer $g'(b)$.

40 Soit x un réel de l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Établir la relation $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ en considérant un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 1 et x.
Établir d'autres relations du même type grâce au triangle.

41 On considère un carré ABCD de côté a où a est un réel strictement positif. Soit M un point quelconque de $[\text{AB}]$.
Le cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon a coupe $[\text{CM}]$ en M'. On pose $\text{BM} = x$.
Exprimer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{BM}'}$ et l'aire du secteur angulaire $\text{BM}'\text{C}$ en fonction de a et de x.

42 Démontrer que pour tout couple $(x\,;y)$ de l'intervalle $[-1\,;1]$ on a : $\left|x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right| \leqslant 1$.

QUESTIONS DE COURS

$\boxed{1}$ Simplifier Arccos(cos x) et cos(Arccos x).

$\boxed{2}$ Démontrer que la fonction Arcsinus est impaire.
Exprimer Arccos($-x$) en fonction de Arccos x pour $x \in [-1\,;1]$.

$\boxed{3}$ Donner les domaines de dérivabilité et les dérivées des fonctions Arccosinus, Arcsinus et Arctangente.
Démontrer les formules.

$\boxed{4}$ Énoncer la propriété sur le graphe d'une fonction numérique bijective et de sa réciproque.
Application aux graphes des fonctions Arccosinus et Arcsinus.

$\boxed{5}$ Donner la relation entre Arccos x et Arcsin x pour $x \in [-1\,;1]$.
Démontrer cette relation si possible par deux méthodes différentes.

$\boxed{6}$ Donner les primitives de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t-z}$ où z est un nombre complexe.

$\boxed{7}$ On considère la fonction $f = \text{Arcsin} \circ \cos$.
1°) Étudier la parité et la périodicité de *f*. En déduire un intervalle d'étude I de *f*.
2°) Donner une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x \in \text{I}$.
3°) Tracer la représentation graphique de *f*.

$\boxed{8}$ On considère la fonction $f = \text{Arccos} \circ \cos$.
1°) Étudier la parité et la périodicité de *f*. En déduire un intervalle d'étude I de *f*.
2°) Donner une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x \in \text{I}$.
3°) Tracer la représentation graphique de *f*.

$\boxed{9}$ Étude des fonctions tangente et Arctangente.

$\boxed{10}$ Recopier et compléter les équivalences suivantes à l'aide des fonctions Arccosinus, Arcsinus et Arctangente.

$\begin{cases} \cos x = y \\ x \in [0\,;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \sin x = y \\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \tan x = y \\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \dots$

$\boxed{11}$

Pour $x \in [0\,;\pi]$, simplifier $\text{Arccos}(\cos x)$.

Pour $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, simplifier $\text{Arcsin}(\sin x)$.

Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, simplifier $\text{Arctan}(\tan x)$.

Pour $x \in [-1\,;1]$, simplifier $\cos(\text{Arccos}\, x)$.

Pour $x \in [-1\,;1]$, simplifier $\sin(\text{Arcsin}\, x)$.

Pour x réel quelconque, simplifier $\tan(\text{Arctan}\, x)$.

$\boxed{12}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $\text{Arc}\cos x \geqslant \dfrac{\pi}{2}$; $\text{Arcsin}\, x \geqslant \dfrac{\pi}{3}$; $\text{Arctan}\, x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{13}$ Compléter l'équivalence : $\tan x = y \Leftrightarrow x = \dots$.

Le 18-1-2015

$x \in \mathbb{R} \qquad y \in [-1\,;1]$

$\cos x = y \Leftrightarrow x = \text{Arccos}\, y + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\,\text{Arccos}\, y + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$

$x \in \mathbb{R} \qquad y \in [-1\,;1]$

$\sin x = y \Leftrightarrow x = \text{Arcsin}\, y + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\,\text{Arcsin}\, y + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$

$\boxed{14}$ Écrire les relations fondamentales liant le cosinus et l'Arccosinus.
Faire de même pour le sinus et la tangente.

Cos Arccos ; Arcos(cosx) etc.

Simplifier sin(Arcos), tan(Arccos) etc.

RÉPONSES

1 1°) $]-1\,;1]$

2 1°) $\lim\limits_{0} f=0$; 2°) $f(x)=\dfrac{\text{Arctan}\,x}{2}$

3

Il y a des valeurs remarquables de Arcsin, Arccos, Artan : il s'agit des valeurs obtenues par lecture inverse dans le tableau des valeurs remarquables des cosinus, sinus et tangente.

On a $0<\dfrac{5}{13}<\dfrac{1}{2}$ et $0<\dfrac{4}{5}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$ et $0<\beta<\dfrac{\pi}{3}$ donc $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$; $\alpha+\beta=\text{Arcsin}\,\dfrac{63}{65}$

Il faut reprendre le corrigé avec l'énoncé modifié.

$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{16}{65}=\sin\gamma$

Cette égalité donne $\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right)$.

Comme $\alpha+\beta$ et $\dfrac{\pi}{2}-\gamma$ sont tous deux dans l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}-\gamma$.

4

5 **Question préliminaire**

$$\text{Arccos}(\cos x)=\begin{cases} x \text{ si } x\in[0\,;\pi] \\ 2\pi-x \text{ si } x\in[\pi\,;2\pi]\end{cases}$$

Partie A 2°)

$$f(x)=\begin{cases} 2\text{Arccos}\,x \text{ si } x\in[0\,;1] \\ 2\pi-2\text{Arccos}\,x \text{ si } x\in[-1\,;0]\end{cases}$$

Partie B

1°) Pour l'ensemble de définition de g, on résout l'inéquation $-1\leqslant 4x^3-3x\leqslant 1$.

On peut éventuellement étudier la fonction $P : x \mapsto 4x^3-3x$.

Il s'agit d'une fonction impaire.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad P'(x)=12x^2-3$

$P'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=\dfrac{1}{2}$

$P'(x)>0 \Leftrightarrow x\in$

On remarque que $P(-1)=P\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$ et que $P(1)=P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$.

Comme P est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$, strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-1\,;1]$.

L'ensemble de définition de g est donc $[-1\,;1]$.

2°) On pose $x=\cos\theta$.

$$\begin{aligned} g(x)&=\text{Arccos}\left(4\cos^3\theta-3\cos\theta\right)\\ &=\text{Arccos}\left(\cos\theta\left(4\cos^2\theta-3\right)\right)\\ &=\text{Arccos}\left(\cos\theta\left(2+2\cos2\theta-3\right)\right)\\ &=\text{Arccos}\left(\cos\theta\left(2\cos2\theta-1\right)\right)\\ &=\text{Arccos}\left(2\cos\theta\cos2\theta-\cos\theta\right)\\ &=\text{Arccos}\left(\cos3\theta\right)\end{aligned}$$

On pose $x=\cos u$ avec u dans l'intervalle $[0\,;\pi]$.

$f(x)=\text{Arccos}(\cos 3u)$

D'après la question préliminaire, on a :

$$g(x)=\begin{cases} 3\text{Arccos}\,x \text{ si } x\in\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right] \\ 2\pi-3\text{Arccos}\,x \text{ si } x\in\left[-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right] \\ 3\text{Arccos}\,x-2\pi \text{ si } x\in\left[-1\,;-\dfrac{1}{2}\right]\end{cases}$$

6 2°) $\tan(a+b+c)=\tan\left(a+(b+c)\right)$; attention à distinguer le cas où $b+c=\dfrac{\pi}{2}$.

La solution de l'équation est $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\boxed{7}$ 2°) c) **Application :**

0 n'est pas solution de (E).

Conditions nécessaires :

$0 < \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, x < \pi$ et $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, x \neq \frac{\pi}{2}$ car 0 n'est pas solution de (E).

1ère façon :

$\text{Arctan}(x+1) + \text{Arctan}(x-1) = \frac{\pi}{2}$ pour $x = \sqrt{2}$; on vérifie ensuite que $\sqrt{2}$ n'est pas solution de (E).

$\text{Arctan}(x+1) + \text{Arctan}(x-1) = -\frac{\pi}{2}$ pour $x = -\sqrt{2}$; on vérifie ensuite que $-\sqrt{2}$ n'est pas solution (E).

On se place dans le cas où x est différente de 0, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

2e façon :

S'il existe x solution de (E) tel que $\text{Arctan}(x+1) + \text{Arctan}(x-1) = \frac{\pi}{2}$, alors $\text{Arc}\tan x = 0$ donc $x = 0$.

S'il existe x solution de (E) tel que $\text{Arctan}(x+1) + \text{Arctan}(x-1) = -\frac{\pi}{2}$, alors $\text{Arc}\tan x = \pi$ ce qui est impossible.

On transforme l'équation (E) en $\text{Arctan}(x+1) + \text{Arctan}(x-1) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc}\tan x$.

On peut prendre la tangente de chacun des deux membres.

$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $x = \cancel{-\sqrt{\frac{2}{3}}}$ (On exclut la solution négative car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

$\boxed{8}$ **Partie A** 2°) $\text{Arctan}(\tan x) = x$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ puis $\text{Arctan}(\tan x) = x - \pi$ pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Partie B

2°)

$$\text{Arctan}\left(\tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \begin{cases} \text{Arc}\tan x + \frac{\pi}{3} & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{Arc}\tan x - \frac{2\pi}{3} & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$\boxed{9}$ $f(x) = \text{Arctan}(x+1) - \text{Arc}\tan x$

1°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$

Trois cas : $x \geqslant 0$; $-1 \leqslant x \leqslant 0$; $x \leqslant -1$

$-1 \leqslant x \leqslant 0$: $\text{Arctan}(x+1) \leqslant \frac{\pi}{4}$ et $-\text{Arctan}\, x \leqslant \frac{\pi}{4}$

$x \leqslant -1$: $\text{Arctan}(x+1) \leqslant 0$ et $-\text{Arctan}\, x \leqslant \frac{\pi}{2}$

3°) $S_n = \text{Arc}\tan(n+1)$; $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{10}$ 2e méthode :

On trouve $f'(x) = 0$ pour tout réel x de l'ensemble de définition de f. Donc f est constante sur tous les intervalles qui constituent l'ensemble de définition de f, en particulier sur $]-1; +\infty[$.

Pour trouver la constante sur $]-1; +\infty[$, il y a trois façons : $f(0)$, limite en $(-1)^+$, limite en $+\infty$.

$\boxed{11}$ condition : $(x; y) \in [-1; 1]^2$

$x = \sin\frac{\pi}{5}$; $y = \sin\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{10}$.

Utiliser $\text{Arccos}\, y + \text{Arcsin}\, y = \frac{\pi}{2}$.

Il faut impérativement faire la réciproque car on n'a pas résolu le système par équivalences.
Il y a cependant moyen de résoudre le système par équivalences.

$\boxed{14}$ Démontrons que pour tout réel x strictement positif, on a : $\text{Arctan}\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] - 2\,\text{Arctan}\, x = -\frac{\pi}{2}$.

Soit x un réel strictement positif.
On pose $\varphi = \text{Arctan}\, x$.

On a : $\varphi \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{\tan^2\varphi - 1}{2\tan\varphi} = -\cot(2\varphi)$

Donc $\text{Arctan}\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = -\frac{\pi}{2} + 2\varphi$ et $2\,\text{Arctan}\, x = 2\varphi$.

Donc on a : $-\frac{\pi}{2} + 2\varphi - 2\varphi = -\frac{\pi}{2}$

On a démontré que pour tout réel x strictement positif, on a : $\text{Arctan}\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] - 2\,\text{Arctan}\, x = -\frac{\pi}{2}$.

Le 13-8-2020

On peut faire des vérifications : $x = 1$, $x = \sqrt{3}$, x tend vers $+\infty$ ou 0^+.

$\boxed{16}$ $x_1 < x_2 < \ldots < x_7$

$\theta_i = \text{Arctan}\, x_i$

$\theta_i \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$x_1 = \tan\theta_1$, $x_2 = \tan\theta_2$, …, $x_7 = \tan\theta_7$

$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_7 < \frac{\pi}{2}$

$\theta_7 - \theta_1 < \pi$

$$\sum_{i=1}^{6}\left(\theta_{i+1}-\theta_i\right)=\theta_7-\theta_1$$

Donc si $\forall i \quad \theta_{i+1}-\theta_i \geqslant \dfrac{\pi}{6}$, alors $\theta_7-\theta_1 \geqslant \pi$

$\exists i \quad 0<\theta_{i+1}-\theta_i<\dfrac{\pi}{6}$

$0<\tan\left(\theta_{i+1}-\theta_i\right)<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

17 $f\,'(x)=0$; f est constante sur $\mathbb{R}$; $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

21 $f\,'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

22

$$\text{Arcsin}\,x+\text{Arcsin}\,\sqrt{1+x^2}=\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

On regarde l'ensemble de résolution de (1).
L'ensemble de définition est égal à $\{0\}$.

$$2\text{Arcsin}\,x=\text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad (2)$$

$$2\text{Arcsin}\,x=\underbrace{\text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)}_{\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]}$$

On en déduit que $\text{Arcsin}\,x\in\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

25 Pas très simple.
La dérivée n'est pas agréable du tout.

$$\begin{aligned}
f\,'(x)&=\text{Arccos}\,x+x\times\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\
&=\text{Arccos}\,x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\
&=\text{Arccos}\,x-x\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\,''(x)&=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\left[1\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+x\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2x)\times\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\\
&=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\frac{-2\left(1-x^2\right)+x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\frac{3x^2-2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

x	0		$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$		1
Signe de $f\,''(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $f\,'$	$\dfrac{\pi}{2}$	↗		↘	

26 1°)]– Arccos x, Arccos x[; 2°) [– π, Arcsin y[∪]π – Arcsin y, π]

29 Intéressant : le point en lequel la fonction auxiliaire admet un extremum peut se calculer à l'aide d'un Arccos et l'on peut donner la valeur exacte de l'extremum.

30 Par limite en 0^+ ou $+\infty$.

33 $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x=-\frac{\pi}{3}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z})$$

34

Équation en Arctan : $x=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$

Équation en Arcsin :

Il faut commencer par donner l'ensemble auquel appartient x.

$x\in[-1\,;1]$ et $2x\in[-1\,;1]$ donc $x\in\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.

$$\text{Arcsin}\,2x=\frac{\pi}{4}-\text{Arcsin}\,x$$

$$\sin\left(\text{Arcsin}\,2x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\text{Arcsin}\,x\right)$$

$2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos\left(\text{Arcsin } x\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}x$

$2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)$

$\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-x^2}$

$\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 x=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)$

$\left(\frac{9}{2}+2\sqrt{2}\right)x^2=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)$

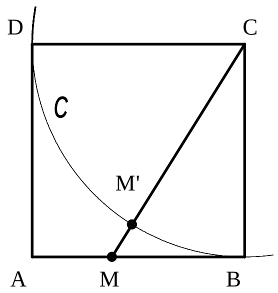
$\left(9+4\sqrt{2}\right)x^2=1-x^2$

$\left(10+4\sqrt{2}\right)x^2=1$

$x=\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}$ ou $x=-\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}$

On ne retient que la solution $\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}$.

$\boxed{\textbf{41}}$



long $\overset{\frown}{\text{BM}'}=a\times\text{Arctan}\frac{x}{a}$ $\mathcal{A}=\frac{1}{2}a^2\text{Arctan}\frac{x}{a}$