Exercices sur les coniques

1 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$; la courbe plane $\mathcal{C}$ est le support de la courbe paramétrée $\gamma : t \mapsto \overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ où, pour tout nombre réel t, $x(t) = 3\sin t + 2\cos t$ et $y(t) = 2\sin t$.

1°) Soit α le réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\alpha = 2$.
Calculer $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$.
2°) Soit $\vec{\mathrm{I}}$ et $\vec{\mathrm{J}}$ les vecteurs définis par $\vec{\mathrm{I}} = \sin\alpha\ \vec{i} + \cos\alpha\ \vec{j}$ et $\vec{\mathrm{J}} = -\cos\alpha\ \vec{i} + \sin\alpha\ \vec{j}$.
Vérifier que, pour tout nombre réel t, on a : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = 4\cos(t-\alpha)\vec{\mathrm{I}} + \sin(t-\alpha)\vec{\mathrm{J}}$.
En déduire la nature de $\mathcal{C}$ et ses éléments caractéristiques.
3°) Construire la courbe $\mathcal{C}$.

2 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1°) Déterminer la nature de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $9x^2 + 16y^2 = 144$ et préciser ses éléments caractéristiques.
Tracer $\mathcal{C}$.
2°) Donner la définition bifocale de $\mathcal{C}$.
3°) Donner un système d'équations paramétriques de $\mathcal{C}$.
4°) Déterminer les points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 2.
5°) Déterminer un carré inscrit dans $\mathcal{C}$, de centre O dont les côtés sont parallèles aux axes du repère.

3 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Construire la parabole $\mathcal{C}$ de foyer F(1 ; 1) et admettant la droite D d'équation $x = -4$ pour directrice.
Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

4 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Construire la parabole $\mathcal{C}$ de foyer F(2 ; – 3) et admettant la droite D d'équation $y = 2$ pour directrice.
Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

5 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne

$$x = \frac{y^2}{4} + y + 2.$$

Démontrer que $\mathcal{C}$ est une parabole.
Déterminer son sommet, son foyer et sa directrice.

6 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire

$$\rho = \frac{1}{1+\cos\theta+\sin\theta}.$$

7 1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire
$\rho = \frac{1}{1+\cos\theta}$. Quelle est sa nature ?
2°) Déterminer l'angle formé par la tangente et l'axe des abscisses au point de paramètre θ.

8 1°) Étudier la courbe $\mathcal{C}$ définie par les équations paramétriques $x(t) = t + \frac{1}{t}$ et $y(t) = 2t - \frac{1}{t}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
2°) Déterminer la nature de $\mathcal{C}$.

9 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x(t) = t^2 - t + 1 \\ y(t) = t^2 + t + 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.
1°) Étudier et tracer $\mathcal{C}$.
2°) Déterminer la nature de $\mathcal{C}$.

10 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$.
1°) Calculer le discriminant Δ de $\mathcal{C}$; en déduire le genre de la conique.
2°) Soit θ un réel. Soit $\vec{I}$ et $\vec{J}$ les vecteurs définis par $\vec{I} = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$ et $\vec{J} = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$.
Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}' = \left(\mathrm{O}, \vec{I}, \vec{J}\right)$; en déduire une valeur de θ telle que $\mathcal{C}$ admette une équation de la forme $aX^2 + bY^2 + cX + dY + f = 0$ dans le repère $\mathcal{R}'$.
Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ et préciser ses éléments caractéristiques.

11 Soit A et F deux points fixés distincts du plan et E une ellipse dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus proche de F.
1°) Déterminer l'ensemble des centres O des ellipses E.
2°) Soit B et B' les sommets du petit axe de E. On note Δ la perpendiculaire en A à (FA).
Démontrer que $\mathrm{BF} = \mathrm{BH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur Δ ; en déduire l'ensemble des points B et B'.

12 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère l'ellipse E d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a et b sont deux réels strictement positifs fixés).
1°) Soit M un point quelconque de E. On note θ l'écart angulaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$.
.
Calculer OM^2 en fonction de θ.
2°) Soit M_1 et M_2 deux points quelconques de E tels que l'angle $\widehat{\mathrm{M}_1\mathrm{OM}_2}$ soit droit.
Calculer $\frac{1}{\mathrm{OM}_1{}^2} + \frac{1}{\mathrm{OM}_2{}^2}$; en déduire que la droite $(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)$ reste tangente à un cercle fixe (on pourra utiliser la relation métrique $\frac{1}{\mathrm{AH}^2} = \frac{1}{\mathrm{AB}^2} + \frac{1}{\mathrm{AC}^2}$ pour un triangle ABC rectangle en A de hauteur [AH]).

13 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère le polynôme $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$.
Déterminer l'ensemble E des points M(x, y) tels que $P(x) = P(y)$.

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique 3 cm). Soit $\mathcal{C}$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{2+\cos\theta} \\ y(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{2+\cos\theta} \end{cases}$$

1°) a) Comparer les points M de paramètres θ et – θ. Quelle conclusion peut on en tirer pour $\mathcal{C}$? Expliquer alors comment on peut obtenir $\mathcal{C}$ à partir de la construction de $\mathcal{C}_1$ correspondant à $\theta \in [0\,;\pi]$.
b) Étudier les variations des fonctions x et y sur $[0\,;\pi]$. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une tangente en chacun de ses points. Préciser les points de $\mathcal{C}_1$ où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.
c) Préciser les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ avec l'axe vertical et donner une équation cartésienne de la tangente en ce point.
d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ en faisant apparaître les éléments précédents.
2°) M_θ désignant le point de paramètre θ, exprimer en fonction de θ la distance OM_θ et la distance de M_θ à la droite d'équation $x = 1$. En déduire que M_θ appartient à une conique *E* dont on précisera le foyer, la directrice et l'excentricité. Préciser son centre, ses sommets, ses axes de symétrie. Donner une équation cartésienne de E dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

15 Soit *P* le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note P^* le plan privé du point A d'affixe 1.
On considère l'application *f* de P^* dans *P* qui, à tout point M d'affixe *z*, associe le point M d'affixe $z' = \dfrac{1}{(1-z)^2}$.
On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.
Déterminer l'image du cercle $\mathcal{C}$ privé du point A par *f*.

16 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Déterminer l'ensemble des centres, des sommets et des foyers des ellipses d'équations $\lambda x^2 + y^2 - 2x = 0$ où λ décrit $\mathbb{R}_+^*$.

17 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit I(1 ; 0) et I′(2 ; 0). Soit λ un réel quelconque de l'intervalle]0 ; 1[.
On note E_λ la courbe d'équation $x^2 + \lambda y^2 - 2\lambda x = 0$.
1°) Démontrer que E_λ est une ellipse. Déterminer les coordonnées de son centre ω, des sommets A et A′ du grand axe, des sommets B et B′ du petit axe, des foyers F et F′.
2°) Quels sont quand λ décrit]0 ; 1[
- l'ensemble γ_1 des points ω ?
- l'ensemble γ_2 des sommets A et A′ ?
- l'ensemble γ_3 des sommets B et B′ ?
- l'ensemble γ_4 des foyers F et F′ ?

Tracer avec précision, sur une même figure, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 puis l'ellipse $E_{\frac{1}{2}}$.
3°) Soit K et K′ les pieds des directrices.
Après une étude convenable tracer l'ensemble Γ des points K et K′ quand λ décrit l'intervalle]0 ; 1[.

18 Dans le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $x = y^2$.
Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$.
La normale à $\mathcal{C}$ en M recoupe $\mathcal{C}$ en un point N.

La normale en un point M à $\mathcal{C}$ est la droite passant par M perpendiculaire à la tangente.

Déterminer la longueur MN minimale.

19 Soit *E* une ellipse de foyers F et F′. On note *D* la directrice associée à F.
Une droite non parallèle à la droite *D* coupe l'ellipse en deux points M_1 et M_2 et la droite *D* en P.
Démontrer que la droite (FP) est la bissectrice extérieure de l'angle géométrique $\widehat{M_1FM_2}$.

20 Résoudre l'équation différentielle $\left(4-t^2\right)y' + ty = 2$.
Démontrer que les représentations graphiques des solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé sont constituées de morceaux de coniques.

21 On considère une ellipse $\mathcal{C}$ dans le plan.
1°) On coupe cette ellipse par des droites qui ont toutes la même direction δ.
Démontrer que le lieu des milieux des segments formés par les points d'intersection de ces droites est une droite *L*.
2°) Soit E l'un des points d'intersection de la droite *L* avec l'ellipse $\mathcal{C}$ et F l'un des points d'intersection de la droite passant par O de direction δ avec l'ellipse $\mathcal{C}$.
Calculer $OE^2 + OF^2$.

22 Dans le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation
$y^2 - 2xy + 1 = 0$.
1°) Déterminer une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{i}+2\vec{j}\right)$. En déduire la nature de $\mathcal{C}$.
2°) Déterminer une équation de la courbe $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$, dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

23 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note A le point d'affixe 1.
Pour tout nombre complexe *z*, on note M le point d'affixe *z* et M′ le point d'affixe z^4.
Déterminer l'ensemble des points M tels que A, M et M′ soient alignés.

Corrigé

$\boxed{2}$ $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{7}$, $e=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\boxed{3}$ $(y-1)^2=10x+15$ $\boxed{4}$ $x^2-4x+10y+9=0$

$\boxed{5}$ $4(x-1)=(y+2)^2$

$4X=Y^2$

On change de repère.

$2p=4$

$p=2$

Foyer $\mathrm{F}\left|\begin{array}{l} X_{\mathrm{F}}=1 \\ Y_{\mathrm{F}}=0 \end{array}\right.$

Directrice $X=-\dfrac{p}{2}=-1$

Dans le repère initial : sommet $\mathrm{S}(1\,;-2)$, directrice (O*y*), $\mathrm{F}(2\,;-2)$

$\boxed{7}$ 2°) $\tan v=\dfrac{\rho}{\rho'}$; $v=\dfrac{\pi}{2}-\theta$.

$\boxed{11}$ 1°) L'ensemble des points O est (AF) \ [FA).

2°) Chacun des points est situé sur une demi-parabole de foyer F et de directrice Δ. Le sommet de la parabole est A.

$\boxed{10}$ 1°) $\Delta=\dfrac{3}{4}$

2°) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=X\vec{I}+Y\vec{J}$

$\begin{cases} x=X\cos\theta-Y\sin\theta \\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta \end{cases}.$

$X^2(1+\cos\theta\sin\theta)+Y^2(1-\cos\theta\sin\theta)+XY(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+X(\cos\theta-\sin\theta)+Y(-\cos\theta-\sin\theta)=0$

On peut choisir $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

$\dfrac{3}{2}X^2+\dfrac{Y^2}{2}-Y\sqrt{2}=0$.

$\boxed{13}$ Tout passer dans le premier membre et factoriser.
On trouve la réunion de la droite $\Delta : y = x$ et d'une conique.

$\boxed{15}$ On pose $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$. $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(2\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=-\dfrac{1}{4}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)+\mathrm{i}\dfrac{1}{2t}$

Autre façon de faire les calculs :

$z'=1-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}+\mathrm{i}\cot\dfrac{\theta}{2}$

On utilise la relation $\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$.

$$\begin{aligned} z'&=1-\frac{1}{2}\left(1+\cot^2\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2} \\ &=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cot^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2} \\ &=\frac{1-\cot^2\frac{\theta}{2}}{2}+\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$u=\cot\dfrac{\theta}{2}$

$z'=\dfrac{1-u^2}{2}+\mathrm{i}u$

$\begin{cases} x=\dfrac{1-u^2}{2} \\ y=u \end{cases}$

$x=\dfrac{1-y^2}{2}$

$\boxed{16}$ λ = 1 est un cas particulier. Si le centre existe bien, et si tous les points sont des sommets, la notion de foyer est hors de propos.

E_λ a pour équation réduite $\lambda^2\left(x-\dfrac{1}{\lambda}\right)^2+\lambda y^2=1$

Le centre est $\Omega_\lambda\left(\dfrac{2}{\lambda}\,;0\right)$; il décrit le demi-axe positif des abscisses.

Les sommets sur (O*x*) sont O et $\mathrm{A}_\lambda\left(\dfrac{2}{\lambda}\,;0\right)$.

Le sommet A_λ décrit le demi-axe positif des abscisses.

Les sommets de l'axe vertical sont $\mathrm{B}_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\,;\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ et $\mathrm{B'}_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\,;-\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

Ils décrivent la parabole d'équation $x=y^2$, privée de O .

• Pour $\lambda < 1$, on a $\dfrac{1}{\lambda}>\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et l'axe focal est (O*x*).

On a une équation réduite de la forme $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$, avec $a > b >$ O.

Les foyers F_λ et $\mathrm{F'}_\lambda$ ont pour abscisses $\dfrac{1}{\lambda}+c$ et $\dfrac{1}{\lambda}-c$, avec $c^2=\dfrac{1}{\lambda^2}-\dfrac{1}{\lambda}$.

L'abscisse de F_λ est $\frac{1}{\lambda}-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\sqrt{1-\lambda}\right)=\frac{1}{1+\sqrt{1-\lambda}}$

Alors F_λ décrit]BC[avec $B\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$ et C(1 ; 0).

L'abscisse de F'_λ est $\frac{1}{\lambda}+\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\sqrt{1-\lambda}\right)$. Alors F'_λ décrit la demi-droite]Cx).

• Pour $\lambda > 1$, on a $\frac{1}{\lambda}<\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et l'axe focal est $(\Omega_\lambda y)$.

17 1°) $(x-\lambda)^2+\lambda y^2=\lambda^2$

Donc $X = x - 1$ et $Y = y$

$$\frac{X^2}{\lambda^2}+\frac{Y^2}{\lambda}=1$$

$\omega(1\,;0)$

$a=\sqrt{\lambda}\ ;\ b=\lambda\ ;\ c=\sqrt{\lambda-\lambda^2}$.

$A\left(\lambda\,;\sqrt{\lambda}\right)\ ;\ A'\left(\lambda\,;-\sqrt{\lambda}\right)$

$B(2\lambda\,;0)\ ;\ B'(0\,;0)$

$F\left(\lambda\,;\sqrt{\lambda-\lambda^2}\right)\ ;\ F'\left(\lambda\,;-\sqrt{\lambda-\lambda^2}\right)$

2°) L'ensemble γ_1 est le segment]OI[.
L'ensemble γ_2 est un arc de parabole.
L'ensemble γ_3 est le segment [OI′[.
L'ensemble γ_4 est le cercle de diamètre [OI] privé de O et I.

3°) $K\left(\lambda\,;\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-\lambda^2}}\right)\ ;\ K'\left(\lambda\,;-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-\lambda^2}}\right)$

19 Orienter le plan.
Considérer un repère polaire d'origine F.

L'équation polaire de la parabole est $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$.

On note θ_1 et θ_2 associés à M_1 et M_2.
On exprime ensuite que P appartient à la directrice.
On considère les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ colinéaires et de même sens que $\overrightarrow{FM_1}$ et que $\overrightarrow{FM_2}$.
On vérifie que $\overrightarrow{FP}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}$.
Les calculs sont assez lourds.

21 Solution (le 2°) a été rédigé intégralement par Thomas Le Héricy année scolaire 2010-2011 au lycée Hoche) :

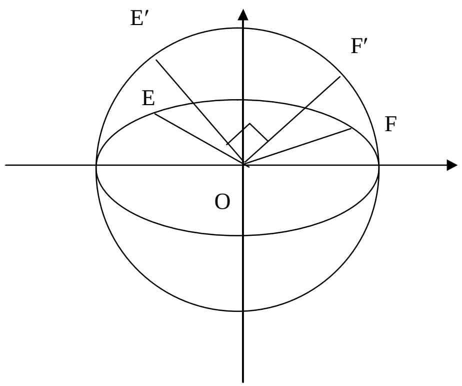
Diamètre d'Appolonius

1°) On raisonne par affinité orthogonale en utilisant un cercle.

2°) On admet : (OE′) ⊥ (OF′).
OE′ = OF′ = a

On a donc : $\begin{cases} x_E = x_{E'} \\ y_E = \frac{b}{a}y_{E'} \end{cases}$ $\begin{cases} x_F = x_{F'} \\ y_F = \frac{b}{a}y_{F'} \end{cases}$ $\begin{cases} x_E = -y_{F'} \\ y_{E'} = x_{F'} \end{cases}$

$$\begin{aligned}OE^2+OF^2 &= (x_E)^2+(y_E)^2+(x_F)^2+(y_F)^2\\ &= (x_E)^2+\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-{x_E}^2\right)+\left(a^2-{x_E}^2\right)+\frac{b^2}{a^2}(x_E)^2\\ &= \cancel{(x_E)^2}+b^2-\cancel{\frac{b^2}{a^2}x_E^2}+a^2-\cancel{(x_E)^2}+\cancel{\frac{b^2}{a^2}(x_E)^2}\\ &= a^2+b^2\end{aligned}$$



23 $3x^2-y^2+2x+1=0$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

$\Delta = 0 - 4 \times 3 \times (-1) = 12 > 0$

hyperbole

$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{y^2}{3}=-\frac{8}{27}$

Questions de cours

$\boxed{\mathbf{1}}$ Ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Coordonnées des sommets et des foyers ; équations cartésiennes des directrices.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Paramétrisation trigonométrique d'une ellipse et d'une hyperbole dans le plan muni d'un repère.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Définition bifocale d'une ellipse et d'une hyperbole.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Parabole d'équation cartésienne $y^2 = 2px$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Coordonnées du foyer et équation de la directrice.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Equation en coordonnées polaires d'une conique.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Définition monofocale d'une conique.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Cercles directeurs d'une ellipse : cercle principal, cercle secondaire, construction point par point d'une ellipse.