Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit a et b deux réels.

On considère une suite (u_n) définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Il s'agit d'une **suite linéaire récurrente d'ordre 2**.

Notre objectif est de déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n.

On va commencer par associer une suite de matrices.

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$.

On considère l'équation $r^2 - ar - b = 0$ (1).

(1) est une équation du second degré, appelée *équation caractéristique* associée à (u_n).
On note Δ le discriminant de (1).

$\Delta = a^2 + 4b$

On va étudier trois cas suivants le signe de Δ.

1er cas : On suppose que **$\Delta > 0$** (c'est-à-dire $a^2 + 4b > 0$)

Dans ce cas, (1) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
On pose $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$.

① Démontrons que Q est inversible. Préciser son inverse Q^{-1}.

$\det \mathrm{Q} = r_2 - r_1$

Comme $r_1 \neq r_2$, $\det \mathrm{Q} \neq 0$.

Par suite Q est inversible et $Q^{-1} = \dfrac{1}{r_2 - r_1}\begin{pmatrix} r_2 & -1 \\ -r_1 & 1 \end{pmatrix}$.

② Démontrons que $AQ = QD$.

$$AQ = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ ar_1 + b & ar_2 + b \end{pmatrix}$$

$$QD = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{pmatrix}$$

Or r_1 et r_2 sont racines de (1) donc $r_1^2 = ar_1 + b$ et $r_2^2 = ar_2 + b$.

D'où $AQ = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $AQ = QD$.

③ Par conséquent, $A = QDQ^{-1}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = QD^nQ^{-1}$

$$U_n = A^n U_0$$

En effectuant les calculs, on obtient : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n}$ **où** $\boldsymbol{(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2}$.

Lorsque $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Dans ce cas, il existe deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

2^e^ cas : On suppose que $\boldsymbol{\Delta = 0}$ (c'est-à-dire $a^2 + 4b = 0$).

Dans ce cas, (1) admet une racine double $r_0 = \dfrac{a}{2}$.

On pose $T = \begin{pmatrix} r_0 & 1 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_0 & 1 + r_0 \end{pmatrix}$.

① Démontrons que Q est inversible et donnons Q^{-1}.

$\det Q = 1\times(1+r_0) - r_0 \times 1 = 1$

Donc $\det Q \neq 0$.

Par suite Q est inversible et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1+r_0 & -1 \\ -r_0 & 1 \end{pmatrix}$.

② Démontrons que $AQ = QT$.

On rappelle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$.

$$AQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_0 & 1+r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & 1+r_0 \\ b+ar_0 & b+a+ar_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & 1+r_0 \\ {r_0}^2 & {r_0}^2+a \end{pmatrix}$$

On sait que r_0 est solution de (1) donc ${r_0}^2 = ar_0 + b$.

$$QT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_0 & 1+r_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_0 & 1 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & 1+r_0 \\ {r_0}^2 & r_0+r_0+{r_0}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & 1+r_0 \\ {r_0}^2 & 2r_0+{r_0}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & 1+r_0 \\ {r_0}^2 & a+{r_0}^2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $AQ = QT$.

On a donc $A = QTQ^{-1}$.

③ Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad T^n = \begin{pmatrix} {r_0}^n & n{r_0}^{n-1} \\ 0 & {r_0}^n \end{pmatrix}$.

On le démontre par récurrence.

④ Exprimons A^n.

$A^n = QT^nQ^{-1}$

⑤ Déduisons-en u_n en fonction de *n*.

$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = {r_0}^n(\lambda n + \mu) \quad \text{où } (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2}$.

Lorsque $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double r_0.

Dans ce cas, il existe deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = {r_0}^n(\lambda n + \mu)$.

3^e cas : On suppose que $\boldsymbol{\Delta < 0}$ (c'est-à-dire $a^2 + 4b < 0$).

Dans ce cas, (1) admet deux racines complexes conjuguées distinctes $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ avec $\rho > 0$.

En procédant de la même manière qu'au cas étudié dans le **I**, on démontre que, dans ce cas, il existe deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right)$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right) \text{ où } (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Lorsque $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées distinctes $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ avec $\rho > 0$.

Dans ce cas, il existe deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right)$.

Application à la suite de Fibonacci :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier naturel *n*.

La suite (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique associée est $r^2 - r - 1 = 0$.
Les racines sont $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On sait qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Comme $u_0 = 0$, on a : $\lambda\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \mu\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \lambda + \mu = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda = -\mu \quad (1')\end{aligned}$$

Comme $u_1 = 1$, on a : $\lambda \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \times \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$ (2).

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \lambda \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \lambda \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda \times \sqrt{5} = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(1') donne alors $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.