Exercices sur les nombres complexes

1 1°) Déterminer une équation du second degré dont les racines sont $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2°) Soit A, B, C trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives *a*, *b*, *c*.

Démontrer que ABC est équilatéral si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{c-a}{b-a}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

En déduire que ABC est équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ ($\mathscr{R}$).

Démontrer que ($\mathscr{R}$) est équivalente à $\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b}=0$.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} z^2=Z \\ Z^2=z \end{cases}$.

On résoudra le système en faisant attention de raisonner par équivalences.

3 Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On pose $P^*=P\setminus\{\text{O}\}$.

On considère l'application *f* de P^* dans lui-même qui à tout point M d'affixe *z* associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{1}{\bar{z}}$.

(*f* est l'**inversion** de pôle O et de puissance 1).

1°) Soit A et B deux points quelconques de P^*. On note A' et B' leurs images respectives par *f*.
Exprimer A'B' en fonction de AB, OA et OB.
2°) Soit $\mathscr{C}$ un cercle passant par O et trois points R, S, T sur ce cercle tels que O, R, S, T soient deux à deux distincts et que le point d'intersection des droites (OS) et (RT) appartienne au segment [RT].
Démontrer que l'on a $\text{OS}\times\text{RT}=\text{OR}\times\text{TS}+\text{OT}\times\text{RS}$ (**théorème de Ptolémée**).
Indication : penser à $f(\mathscr{C}\setminus\{\text{O}\})$.

4 **Théorème de Napoléon**
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère un triangle direct ABC sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA′, ACB′ et ABC′.
On note P, Q et R les centres de gravité respectifs de BCA′, ACB′ et ABC′.
Pour la figure, il est inutile de faire figurer le repère.
1°) On note *a*, *b*, *c*, *a*′, *b*′, *c*′, *p*, *q*, *r* les affixes respectives des points A, B, C, A′, B′, C′, P, Q, R.
a) Traduire, avec les affixes des points concernés, que C' est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
b) Démontrer que l'on a : $a'+b'+c'=a+b+c$.
2°) En déduire que l'on a : $p+q+r=a+b+c$.
3°) Démontrer à l'aide des relations établies précédemment que les triangles ABC, A′B′C′ et PQR ont le même centre de gravité.
4°) Démontrer que l'on a : $3(q-p)=(b'-c)+(c-a')+(a-b)$ et $3(r-p)=(a-c)+(b-a')+(c'-b)$.

5°) Démontrer que l'on a : $a-c=e^{i\frac{\pi}{3}}(b'-c)$; $b-a'=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a')$; $c'-b=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b)$.
6°) Déduire des questions précédentes que le triangle PQR est équilatéral.

5 Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On pose $P^*=P\setminus\{\text{O}\}$.
On note *f* l'application de P^* dans lui-même qui, à tout point M de P^*, d'affixe $z\neq 0$, associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{1}{\bar{z}}$. On note U et V les points du plan d'affixes respectives 1et i.
On n'utilisera pas l'écriture algébrique des nombres complexes dans cet exercice.

1°) Démontrer que, pour tout point M distinct de O, les points M et M′ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.
2°) Démontrer que, si M est distinct de O, U et V alors M′ est distinct de O, U et V.
3°) Établir l'égalité $\dfrac{z'-1}{z'-\text{i}}=-\text{i}\,\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\text{i}}\right)}$.
En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\text{i}}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\text{i}}\right)$.
4°) Soit *z* un nombre complexe tel que $z\neq 1$ et $z\neq \text{i}$ et soit M le point d'affixe *z*.
Démontrer que, si M appartient à la droite (UV), alors M′ appartient à un cercle que l'on définira.

6 Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
À tout nombre complexe *z* non nul, on associe le nombre complexe $Z=1+\dfrac{1}{z}$.
1°) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* d'affixe *z* tels que $|Z|=1$.
2°) Déterminer l'ensemble *F* des points M du plan *P* d'affixe *z* tels que *Z* soit imaginaire pur.

7 1°) Soit *u* et *v* deux nombres complexes quelconques.
Démontrer que l'on a : $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.
2°) Soit α et β deux nombres complexes quelconques. On pose $m=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et l'on note μ une racine carrée de αβ.
Démontrer que l'on a : $|\alpha|+|\beta|=|m+\mu|+|m-\mu|$.

8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+8\text{i}=|z|^2-2$.

9 Soit *z* un nombre complexe et *n* un entier naturel non nul.
Démontrer que si $1+z+z^2+...+z^{n-1}-nz^n=0$, alors $|z|\leqslant 1$.

10 Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1.
Démontrer que le nombre $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ est un nombre réel.

11 On considère le polynôme $P(z)=z^4-\sqrt{2}z^3-4\sqrt{2}z-16$.
1°) Calculer *P*(2i).
2°) En déduire les autres racines de *P*.
3°) Démontrer que les points du plan complexe admettant les racines de *P* pour affixes sont cocycliques.

12 Dans le plan complexe *P* rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note A le point d'affixe 1.
Pour tout point M de *P*, on note M′ son image par le quart de tour direct de centre O.
Déterminer l'ensemble *E* des points M de *P* tels que A, M, M′ soient alignés.

13 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note A le point d'affixe -1 et B le point 1.
On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.
À tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathscr{E}$, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.
1°) Démontrer que les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2°) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M appartenant à $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

14 Pour tout réel $\theta \in \left[0 ; 2\pi\right]$, on pose $z = \sin 2\theta + 2\text{i}\sin^2\theta$.
1°) Calculer le module de z et lorsque z est non nul, donner un argument de z.
2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z lorsque θ décrit l'intervalle $\left[0 ; 2\pi\right]$.

15 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe 1. À tout point M de P, distinct de A, d'affixe z, on fait correspondre le point M′ d'affixe $z' = \dfrac{\text{i}z^2}{z-1}$.
1°) Déterminer l'ensemble E des points M tels que $\text{OM} = \text{OM}'$.
2°) Déterminer l'ensemble F des points M tels que les points O, M, M′ soient alignés.

16 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

À tout point M de P, d'affixe z, on fait correspondre le point M′ d'affixe $z' = z^2 + 2z$.
1°) Déterminer l'ensemble E des points M de P tels que OM = OM′.
2°) Déterminer l'ensemble F des points M de P tels que les points O, M, M′ soient alignés.

17 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

À tout point M de P, d'affixe z, on fait correspondre le point M′ d'affixe $z' = \dfrac{z}{1+\left|z\right|^2}$.

1°) Déterminer l'image d'une droite passant par O et d'un cercle de centre O
2°) Déterminer l'image réciproque d'un cercle de centre O.

18 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble E des points M de P d'affixe z tels que l'on ait $z + \bar{z} = \left|z\right|$.

2°) Déterminer l'ensemble F des points M de P d'affixe z tels que l'on ait $z + \bar{z} = \left|z\right|^2$.

19 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note $\mathbb{Z}[\text{i}]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + \text{i}b$ où a et b sont deux entiers relatifs.

Soit ABCD un carré. On note a, b, c, d les affixes respectives de A, B, C, D.

Démontrer que si a et b appartiennent à $\mathbb{Z}[\text{i}]$, alors c et d appartiennent aussi à $\mathbb{Z}[\text{i}]$.

20 On pose $\omega = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{5}}$.
1°) Démontrer que ω est solution de l'équation de l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ (E).

2°) Résoudre (E) à l'aide du changement d'inconnue $Z = z + \dfrac{1}{z}$.

3°) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

21 On pose $\text{j} = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$. On rappelle que $1 + \text{j} + \text{j}^2 = 0$.

Partie A

1°) Démontrer que tout nombre complexe z peut s'écrire, de façon unique, sous la forme $z = x + y\text{j}$ où x et y sont deux réels.
2°) On considère l'ensemble $\text{E} = \left\{z \in \mathbb{C} \,/\, z = a + b\text{j} \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}\right\}$.

Démontrer que E est stable par somme et par produit c'est-à-dire que la somme et le produit de deux éléments de E appartient à E.

Partie B

On considère l'ensemble $\text{I} = \left\{z \in \mathbb{C} \,/\, z = \left(1-\text{j}\right)\left(a + b\text{j}\right) \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}\right\}$.

1°) Démontrer que I est inclus dans E.
2°) Démontrer que I est stable par la somme.
Démontrer que le produit d'un élément de I par un élément de E est un élément de I.

3°) Déterminer les éléments de I qui appartiennent à $\mathbb{Z}$.

4°) Soit $z = a + b\text{j}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ un élément de E.

Démontrer que $z - \left(a + b\right)$ est un élément de I.

5°) Démontrer que quel que soit $z \in \text{E}$ un et un seul des trois nombres z, $z - 1$ et $z + 1$ est élément de I.

Indication : En posant $z = a + b\text{j}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, on pourra remarquer qu'un seul élément de l'ensemble $\left\{a + b - 1, a + b, a + b + 1\right\}$ appartient à I.

22 Soit O, A, B trois points deux à deux distincts du plan complexe P tels que OAB soit un triangle direct.
Soit C, D, E, F, G, H, I, J les points tels que ABCD, OBEF, OAGH soient des carrés (ABCD indirect, OAGH indirect, OBEF direct), BCIE et ADJG soient des parallélogrammes.
Démontrer que le triangle OIJ est rectangle isocèle.
Indication : on munit le plan d'un repère orthonormé direct d'origine O ; on note a et b les affixes respectives des points A et B dans ce repère.

23 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe 1.

À tout point M de P, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe $z' = \dfrac{z^2}{1-z}$.

1°) Déterminer l'ensemble E des points M de P tels que $\text{OM} = \text{OM}'$.
2°) Soit G l'isobarycentre des points A, M et M′.
Déterminer l'ensemble des points G lorsque M décrit le cercle de centre A et de rayon R ($R > 0$).

24 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe 1.

On considère l'application f de P dans lui-même qui, à tout point M de P, d'affixe z, fait correspondre le point M′ d'affixe $z' = z^2 + 1$.
1°) Déterminer les points invariants par f.
2°) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $r > 0$.
Déterminer $f(\mathscr{C})$.
3°) Soit Γ un cercle de centre A et de rayon $\rho > 0$.
Déterminer $f^{-1}\left(\Gamma\right) = \left\{\text{M} \in P \,/\, \text{M}' \in \Gamma\right\}$ (image réciproque de Γ par f).
4°) Déterminer l'ensemble E des points $\text{M} \in P$ tels que les points A, M, M′ soient alignés.

25 Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe 3.

À tout point M de *P*, distinct de A, d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{z-3}$.

1°) Déterminer l'ensemble *E* des points M de *P* tels que $|z'| = 1$.
2°) Déterminer l'ensemble *F* des points M de *P* tels que z' soit réel.
3°) Déterminer l'ensemble *G* des points M de *P* tels que z' soit imaginaire pur.

26 Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et – 1.

À tout point M de *P*, distinct de O, d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{z}$.

1°) Démontrer que la droite (AB) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$.

2°) a) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a : $\left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$.

b) Soit I le milieu de $[MM']$.

Démontrer que l'on a $IA \times IB = IM^2$ et que, pour $M \neq A$ et $M \neq B$, on a $M \neq M'$ et la droite (MM′) est bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right)$.

27 Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit U le point d'affixe 1, M un point d'affixe *z*, M′ un point d'affixe *z*′ et M′′ le point d'affixe *zz*′ où *z* et *z*′ sont deux nombres complexes distincts et différents de 0 et 1.
1°) Démontrer que les points M, M′ et M′′ sont distincts deux à deux.
2°) Démontrer que, pour tout couple (*z*, *z*′) de nombres complexes vérifiant les conditions ci-dessus, on a :
$\arg \frac{zz'-z'}{zz'-z} = \arg \frac{z'}{z'-1} - \arg \frac{z}{z-1}$ (2π).
3°) En déduire que M, M′, M′′ sont alignés si et seulement si les points O, U, M, M′ sont cocycliques ou alignés.

28 1°) Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + |z| = e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Indication : poser $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [-\pi ; \pi]$.

29 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$ (E).

On commencera par démontrer que (E) est équivalente à $z^2(z+3)^2 + 100 = 0$.

30 On considère l'application *f* de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{\ln|z|}{z^2}$.

1°) On pose $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$ et θ réel). Donner le module et un argument de $f(z)$.
2°) Soit *R* un réel strictement positif.
On pose $E = \{z \in \mathbb{C} / |z| = R\}$. Déterminer *f* (*E*).

31 On note *f* l'application de *P* dans lui-même qui, à tout point M de *P*, d'affixe $z \neq 0$, associe le point M′ d'affixe $z' = 1 + z^2$.
On note A le point d'affixe 1.
1°) Déterminer les points invariants par *f*.
2°) Soit M_1 et M_2 deux points quelconques du plan.
Démontrer que $M_1' = M_2'$ si, et seulement si, ($M_1 = M_2$) ou (M_1 et M_2 sont symétriques par rapport au point O).
3°) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$.
a) Démontrer que $\mathscr{C}' = f(\mathscr{C})$ est un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
b) Etudier le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ suivant les valeurs de *R*.

32 **Configuration de Von Aubel**
Dans le plan orienté, on considère un quadrilatère ABCD non croisé et de sens direct. Soit I, J, K, L les points tels que les triangles AIB, BJC, CKD et DLA soient isocèles rectangles respectivement en I, J, K, L à l'extérieur du quadrilatère.
1°) Démontrer que $(IK) \perp (JL)$ et que $IK = JL$.
2°) Démontrer que les quadruplets (A ; B ; C ; D) et (I ; J ; K ; L) ont le même isobarycentre.
3°) Soit M, N, P, Q les milieux respectifs de [AC], [BD], [IK], [JL].
a) Démontrer que IJKL est un parallélogramme si et seulement si ABCD est un parallélogramme.
b) On suppose que ABCD n'est pas un parallélogramme.
Démontrer que MNPQ est un carré.

33 Soit *a* et *b* deux nombres complexes de module 1.
Démontrer que : $a + b + 1 - ab = 0 \Leftrightarrow \{a ; b\} = \{i ; -i\}$.

34 1°) Soit *n* un entier naturel non nul.

Démontrer que pour tout réel *x* qui n'est pas un multiple entier de π on a : $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left[(2k+1)x\right] = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$.

2°) Résoudre dans l'intervalle]0 ; π[l'équation $\sin x + \sin 3x - \sin 4x + \sin 5x + \sin 7x = 0$.

35 **Parties intégrales du plan**
Soit *P* le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct qu'on assimilera à $\mathbb{C}$.
Une partie *A* de *P* sera dite intégrale si et seulement si tous les points de *A* sont à distance entière les uns des autres, c'est-à-dire si et seulement si pour tout couple (M ; N) de *A* la distance MN est entière.
1°) Donner une partie intégrale infinie de $\mathbb{C}$.

2°) Donner des parties intégrales de $\mathbb{C}$ de cardinal 3 et 4 formées de points trois à trois non alignés.

On veut maintenant démontrer le résultat suivant : pour tout entier naturel *n* non nul, il existe une partie intégrale de $\mathbb{C}$ de cardinal *n* incluse dans un cercle et donc en particulier formée de points trois à trois non alignés.

On note $G = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1, \text{Re}(z) \in \mathbb{Q}, \text{Im}(z) \in \mathbb{Q}\}$ et $G' = \{z^2, z \in G\}$
3°) Soit θ et θ′ deux réels. Exprimer $|e^{2i\theta} - e^{2i\theta'}|$ en fonction de $\sin(\theta - \theta')$.
4°) Exprimer cos 2θ et sin 2θ en fonction de tan θ et en déduire que G est infini.
5°) Démontrer que $G' \subset G$ et que G′ est infini.
6°) Si *a* et *b* sont deux éléments dans G′, démontrer que $|a - b| \in \mathbb{Q}$.
7°) Conclure.

36 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On considère l'équation $(1+z)^n=(1-z)^n$ (E) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Démontrer que (E) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^n=1$.

Résoudre (E).

37 Soit x et h deux réels. Soit n un entier naturel.

Donner une expression simplifiée des sommes $C=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(x+kh)$ et $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(x+kh)$.

38 Soit α et β deux réels. Soit n un entier naturel.

Donner une expression simplifiée des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\cos(\alpha+k\beta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\sin(\alpha+k\beta)$.

39 Soit α un réel fixé. Soit n un entier naturel.

Donner une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k}\cos(k\alpha)$.

40 Soit α qui n'est pas de la forme $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec k entier relatif. Soit n un entier naturel.

Donner une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(k\alpha)}{(\cos\alpha)^k}$.

41 1°) Démontrer que pour tout réel θ, on a : $1-\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=-\mathrm{i}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
2°) Soit n un entier relatif non nul et θ un réel n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$.

On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos^k\theta\,\cos(k\theta)$, $S'_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos^k\theta\,\sin(k\theta)$ et $U_n=S_n+\mathrm{i}S'_n$.

Démontrer que U_n est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
En déduire une expression simplifiée de U_n puis de S_n en fonction de n et θ.

42 On pose $z=\sqrt{3}+1+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)$.
Calculer z^2 ; en déduire la forme exponentielle de z.

43 Soit n un entier relatif.
Donner une expression simplifiée de $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$.

44 **Question préliminaire :**
Justifier graphiquement que pour tout réel x, on a : $|\sin x|\leqslant|x|$.

Démontrer que pour tout réel x, on a : $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1|\leqslant|x|$.
Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

45 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(z^2+z+1\right)^2+1=0$.

46 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathrm{i}z^6-2z^3=1$.

47 On considère l'équation $z^3-(6+3\mathrm{i})z^2+(21+19\mathrm{i})z-26(1+\mathrm{i})=0$ (E) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1°) Démontrer que (E) admet une racine réelle.
2°) Résoudre (E).

48 On considère l'équation $z^3-4\mathrm{i}z^2-(6+\mathrm{i})z+3\mathrm{i}-1=0$ (E) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.
1°) Démontrer que (E) admet une racine imaginaire pure.
2°) Résoudre (E).

49 Démontrer que pour tout triplet (z_1, z_2, z_3) de nombres complexes, on a :
$|1+z_1|+|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3|\geqslant 1$.

50 Pour n entier naturel et θ réel, on pose : $A_n(\theta)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\cos(k\theta)$ et $B_n(\theta)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\sin(k\theta)$.

Calculer $A_n(\theta)$ et $B_n(\theta)$ en fonction de n et de θ.

En déduire les formules $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k=2^n$ $(n\geqslant 0)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k=0$ $(n\geqslant 1)$.

51 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $6z^2-(5-\mathrm{i})z+2-\dfrac{5\mathrm{i}}{6}=0$.

52 Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe $z\neq 0$, tels que les points d'affixes 1, z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ soient cocycliques.

53 On considère le polynôme $P(z)=z^3-z^2\cos\varphi+2\sin\varphi\,(1+\sin\varphi)z+2\cos\varphi(1+\sin\varphi)$ où φ est un paramètre réel $(z\in\mathbb{C})$.

1°) Calculer $P(-\cos\varphi)$; en déduire qu'il existe un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z)=(z+\cos\varphi)Q(z)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(z)=0$ (E).

Vérifier que, pour tout réel φ, on a : $1+\sin\varphi=\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}+\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)^2$; en déduire le module des racines de l'équation (E) pour $\varphi\in\,]0\,;\pi[$.

54 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M d'affixe z non nulle, on fait correspondre le point M' d'affixe $z'=-\dfrac{1}{\bar{z}}$.

On note U et V les points d'affixe – 1 et 1.
Démontrer que les points U, V, M, M' sont cocycliques.

$\boxed{55}$ Soit z un nombre complexe de module égal à 1.
1°) Donner un encadrement de $|1+z|$.
2°) Exprimer la partie réelle de z en fonction de $|1+z|$.
3°) Exprimer $|1-z+z^2|$ en fonction de Re (z) et de $\mathrm{Re}\left(z^2\right)$.
4°) Démontrer que $\sqrt{3} \leqslant |1+z|+|1-z+z^2| \leqslant \dfrac{13}{4}$.
Indication : on pourra exprimer $|1+z|+|1-z+z^2|$ en fonction de $t=|1+z|$.

$\boxed{56}$ Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $|z_1|=|z_2|=1$ et $|2+z_1z_2|=1$.
Démontrer que l'on a : $z_1z_2=-1$.

$\boxed{57}$ **Question préliminaire :**

Soit a, b, c trois réels positifs.
Démontrer que si $a \leqslant b+c$, alors $\dfrac{a}{1+a} \leqslant \dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$.

Application :

Soit z_1, z_2, …, z_n n nombres complexes ($n \in \mathbb{N}^*$).

Démontrer que l'on a : $\dfrac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right|}{1+\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right|} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{|z_k|}{1+|z_k|}$.

$\boxed{58}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n+\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n=2\cos\alpha$ où α est un réel donné.

$\boxed{59}$ Déterminer l'image du réseau des droites parallèles à l'axe des réels et du réseau des droites parallèles à l'axe des imaginaires purs par l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe e^z.

$\boxed{60}$ Soit x, y, z trois nombres complexes quelconques.
On pose $j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
Démontrer que l'on a : $(x+y+z)(x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz)=x^3+y^3+z^3-3xyz$.
En déduire que si $x+y+z=0$, alors $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

$\boxed{61}$ Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
1°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P d'affixe z tels que $|\mathrm{e}^z|=1$.
2°) Déterminer l'ensemble F des points M du plan P d'affixe z tels que $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}\right|=1$.

$\boxed{62}$ On note P le plan complexe.
Soit $f : P \to P$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=z-z^2$.
Démontrer que le disque fermé D de centre A d'affixe $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ est stable par f, c'est-à-dire que $f(D) \subset D$.

$\boxed{63}$ Soit A, B, C, D quatre points d'un cercle.
Soit P, Q, R, S les milieux respectifs des arcs d'extrémités A-B, B-C, C-D et D-A.
Démontrer que l'on a : (PR) $\perp$ (QS).

$\boxed{64}$ Pour tout entier naturel n non nul, on note U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Déterminer une condition nécessaire pour que $U_n \subset U_m$.

$\boxed{65}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+z)^n=(1-z)^n$ (n est un entier naturel fixé non nul).

$\boxed{66}$ Démontrer que pour tout couple (u, v) de nombres complexes on a :
$|u|+|v| \leqslant \sqrt{2}\,\max(|u+v|, |u-v|)$.

$\boxed{67}$ Soit a, b, c, d quatre nombres complexes tels que $a+\mathrm{i}b=c+\mathrm{i}d$ et $a+c=b+d$.
Démontrer qu'il existe un nombre complexe z tel que $(z-a)^4=(z-b)^4=(z-c)^4=(z-d)^4$.

$\boxed{68}$ Soit n et p deux entiers naturels tels que $n>2p$ et $x \in \mathbb{R}$.
Calculer $S=\sum\limits_{q=0}^{2n-1} \cos^{2p}\left(x+\dfrac{q\pi}{2n}\right)$.

$\boxed{69}$ Le but de l'exercice est de démontrer que la fonction $z \mapsto \mathrm{e}^z$ admet des points fixes dans $\mathbb{C}$.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{\tan x}}-\dfrac{x}{\sin x}$.
Démontrer qu'il existe un réel b de l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(b)=0$.

2°) On pose $a=\dfrac{b}{\tan b}$ et $z=a+\mathrm{i}b$.
Démontrer qu'alors $\mathrm{e}^z=z$.

$\boxed{70}$ Soit a, b, c trois nombres complexes deux à deux distincts.
Démontrer que les points du plan complexe d'affixes a, b, c forment un triangle équilatéral si et seulement si $|2a-b-c|=|2b-c-a|=|2c-a-b|$.

$\boxed{71}$ Soit z_1, z_2 … z_n n nombres complexes non nuls de même module, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Démontrer que l'on a : $\dfrac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)...(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2...z_n} \in \mathbb{R}$.

$\boxed{72}$ On considère l'équation $z^3-(6+3\text{i})z^2+(9+12\text{i})z-9(2+3\text{i})=0$ (E) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1°) Démontrer que (E) admet une racine imaginaire pure.
Résoudre (E).

2°) On note M_1, M_2, M_3 les points du plan complexe ayant pour affixes les solutions de (E), M_1 ayant pour affixe la solution imaginaire pure.

a) Déterminer la nature de $\text{M}_1\text{M}_2\text{M}_3$.

b) Déterminer l'affixe du milieu I de $[\text{M}_2\text{M}_3]$; en déduire la construction de M_1, M_2, M_3.

$\boxed{73}$ On pose $\omega=\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{7}}$.

1°) Calculer $1+\omega+...+\omega^6$.

2°) Calculer $\dfrac{\omega}{1+\omega^2}+\dfrac{\omega^2}{1+\omega^4}+\dfrac{\omega^3}{1+\omega^6}$. En déduire $\dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}}+\dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}}+\dfrac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}}$.

$\boxed{74}$ 1°) Soit *a* un réel strictement positif.
Démontrer qu'il n'existe pas de réel *c* tel que $\text{e}^{\text{i}a}-1=\text{i}a\text{e}^{\text{i}c}$.

2°) En déduire que si *a* et *b* sont deux réels tels que $b<a$ alors il n'existe pas de réel *c* tel que $\text{e}^{\text{i}a}-\text{e}^{\text{i}b}=\text{i}(a-b)\text{e}^{\text{i}c}$.

$\boxed{75}$ Soit *z* un nombre complexe de module 1.
Démontrer que l'on a : $|1+z|\geqslant 1$ ou $|1+z^2|\geqslant 1$.

Indication : écrire $2z=(1+z)^2-(1+z^2)$ et raisonner par l'absurde en utilisant l'inégalité triangulaire.

RÉPONSES

2 Les solutions du système sont les couples (0 ; 0), (1 ; 1), $\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} ; e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)$, $\left(e^{i\frac{4\pi}{3}} ; e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$.

7 1°) Soit u et v deux nombres complexes quelconques.
Démontrer que l'on a : $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.

2°) Soit α et β deux nombres complexes quelconques. On pose $m=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et l'on note μ une racine carrée de αβ.
Démontrer que l'on a : $|\alpha|+|\beta|=|m+\mu|+|m-\mu|$.

$$\left(|m+\mu|+|m-\mu|\right)^2=2|m|^2+2|\mu|^2$$

$$\left(|m+\mu|+|m-\mu|\right)^2=2|m|^2+2|\alpha\beta|+2\left|m^2-\mu^2\right|$$

$$=\frac{|\alpha+\beta|^2}{2}+2|\alpha\beta|+\frac{|\alpha-\beta|^2}{2} \qquad \left|\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\alpha\beta\right|$$

$$\left|\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}{4}\right|$$

$$\left|\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\right|$$

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^2$$

8 $4-i$; $-4+i$

10 Il y a plusieurs méthodes.

$|z_1|=|z_2|=1$

1ère méthode : $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=\dfrac{{z_1}^2+2z_1z_2+{z_2}^2}{z_1z_2}=\dfrac{z_1}{z_2}+2+\dfrac{z_2}{z_1}$

$\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=2\cos(\theta_1-\theta_2)+2$ avec θ_1 et θ_2 des arguments respectivement de z_1 et z_2.

On peut préciser le signe de Z et on peut même donner un encadrement de Z : $0\leq Z\leq 4$.

2e méthode : On note θ_1 et θ_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2

$z_1+z_2=e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}=e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\times 2\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}$ donc $(z_1+z_2)^2=e^{i(\theta_1+\theta_2)}\times 4\cos^2\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}$

$z_1z_2=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=4\cos^2\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\in\mathbb{R}$$

3e méthode : On démontre que $\overline{Z}=Z$.

11 1°) Les racines sont 2i, – 2i, $-\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.

2°)

1ère méthode : Les points appartiennent au cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et de rayon $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

2e méthode :

2i, – 2i, $-\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ cocycliques

translation

4i, 0, $-\sqrt{2}+2i$, $2\sqrt{2}+2i$ cocycliques

inversion

$\dfrac{1}{4i}$, $\dfrac{1}{-\sqrt{2}+2i}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{2}+2i}$ alignés

$$A=\frac{\dfrac{1}{-\sqrt{2}+2i}-\dfrac{1}{4i}}{\dfrac{1}{2\sqrt{2}+2i}-\dfrac{1}{4i}}\in\mathbb{R}$$

Déterminons A.

$A=\ldots$ en fonction de modules et de réels donc de nombres appartenant à $\mathbb{R}$.

13 L'ensemble cherché est le cercle de diamètre [OA] privé de O et de A.

14 1°) $|z|=2|\sin\theta|$

Si $\theta\in\left]0\,;\pi\right[$, alors $z=2\sin\theta\, e^{i\theta}$; $\arg z=\arg 2+\arg\sin\theta+\arg e^{i\theta}$

Si $\theta\in\left]\pi\,;2\pi\right[$, alors $z=-2\sin\theta\, e^{i(\theta+\pi)}$.

2°) $z=i+e^{i\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$

22 On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct d'origine O.

$O(0)$, $A(a)$, $B(b)$, $I(ia+b)$, $C(ia+b(1-i))$, $H(-ia)$, $F(ib)$, $D(a(1+i)-ib)$, $J(a-ib)$; $z_I=iz_J$.

Inutile : affixes des points D, G et E : $D(a(1+i)-ib)$, $E(b(1+i))$, $G(a(1-i))$ (sous toute réserve)

Au départ, dans la version initiale je ne donnais pas l'indication sur le repère dans mon énoncé.

Démontrons que OIJ est rectangle isocèle.

On considère A(a) et B(b).

$g-a=\mathrm{i}(0-a)$

$\boxed{g=a(1-\mathrm{i})}$

$d-a=-\mathrm{i}(b-a)$

$\boxed{d=a(1+\mathrm{i})-\mathrm{i}b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{GJ}}$

Donc $z_\mathrm{J}=z_\mathrm{D}-z_\mathrm{A}+z_\mathrm{G}$

$=a(1+\mathrm{i})-\mathrm{i}b-a+a(1-\mathrm{i})$

$=a+ia-ib-a+a-ia$

$=a-\mathrm{i}b$

$\boxed{f=\mathrm{i}b}$

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

Donc $f-e=-b$

$\boxed{e=(1+\mathrm{i})b}$

$c-b=\mathrm{i}(a-b)$

$\boxed{c=b+\mathrm{i}(a-b)}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{EI}}$

$z_\mathrm{I}-e=c-b$

$z_\mathrm{I}=e+c-b$

$z_\mathrm{I}=(1+\mathrm{i})b+b+\mathrm{i}(a-b)-b$

$\boxed{=b+\mathrm{i}a}$

$$\frac{z_\mathrm{I}}{z_\mathrm{J}}=\frac{b+\mathrm{i}a}{a-\mathrm{i}b}=\mathrm{i}\frac{-a-\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b}=\mathrm{i}$$

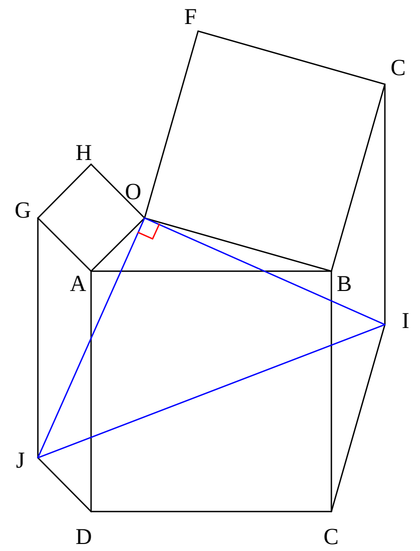
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OJ}},\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right)=\frac{\pi}{2}\quad(2\pi)$$

D'où (OI) $\perp$ (OJ).

$|z_\mathrm{I}|=|z_\mathrm{J}|$

Donc $\mathrm{OI}=\mathrm{OJ}$.

On en déduit que le triangle OIJ est isocèle rectangle en O.



28 $z=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}$

29 Les solutions sont : $\pm1-2\mathrm{i}$; $\pm1+2\mathrm{i}$.

32 1°) $z_\mathrm{I}=\dfrac{\mathrm{i}a+b}{\mathrm{i}+1}$; $z_\mathrm{J}=\dfrac{\mathrm{i}b+c}{\mathrm{i}+1}$ etc.

$$z_\mathrm{L}-z_\mathrm{J}=\frac{\mathrm{i}d+a-\mathrm{i}b-c}{\mathrm{i}+1}$$

$$z_\mathrm{K}-z_\mathrm{I}=\frac{\mathrm{i}c+d-\mathrm{i}a-b}{\mathrm{i}+1}$$

$z_\mathrm{L}-z_\mathrm{J}=\mathrm{i}(z_\mathrm{K}-z_\mathrm{I})$

2°) $z_\mathrm{I}+z_\mathrm{J}+z_\mathrm{K}+z_\mathrm{L}=a+b+c+d$

3°) a) $\mathrm{i}b+c-(\mathrm{i}a+b)=\mathrm{i}c+d-(\mathrm{i}d+a)$

$(1-\mathrm{i})(a-b)=(\mathrm{i}-1)(c-d)$

b) $\dfrac{z_\mathrm{P}+z_\mathrm{Q}}{2}=\dfrac{z_\mathrm{M}+z_\mathrm{N}}{2}$

$z_\mathrm{K}-z_\mathrm{L}=\mathrm{i}(z_\mathrm{N}-z_\mathrm{M})$

41 2°) $S_n + \mathrm{i}S'_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k$

$\cos\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

1er cas : $\theta \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$S_n + \mathrm{i}S'_n = \cos\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{1-\left(\cos\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n}{1-\cos\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \cos\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{1-\cos^n\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1-\left(\cos^2\theta + \mathrm{i}\cos\theta\sin\theta\right)} = \cos\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{1-\cos^n\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{\sin^2\theta - \mathrm{i}\cos\theta\sin\theta}$$

$$S_n + \mathrm{i}S'_n = \cos\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{1-\cos^n\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{\sin\theta\left(\sin\theta - \mathrm{i}\cos\theta\right)} = \cos\theta\ \cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\frac{1-\cos^n\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{\sin\theta(-\mathrm{i})\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}} = \mathrm{i}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(1-\cos^n\theta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{\cos^{n+1}\theta\ \sin(n\theta)}{\sin\theta}}\ .$$

2e cas : $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S_n = n}$$

44 On interprète cette inégalité en se plaçant dans le cercle trigonométrique.
La longueur de la corde entre le point d'affixe 1 et le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est plus petite que la longueur de l'arc.

45 $S = \{\ \mathrm{i}\ ; -\mathrm{i}\ ; -1-\mathrm{i}\ ;\ -1+\mathrm{i}\}$

47 2 est racine réelle du polynôme ; $P(z) = (z-2)\left[z^2 - (4+3\mathrm{i})z + 13(1+\mathrm{i})\right]$

Les racines sont 2, $3 - 2\mathrm{i}$, $1 + 5\mathrm{i}$.

49 Ecrire : $1 = 1 + z_1 - (z_1+z_2) + (z_2+z_3) - z_3$ puis appliquer l'inégalité triangulaire.

51 $6z^2 - (5-\mathrm{i})z + 2 - \frac{5\mathrm{i}}{6} = 0$ $\Delta = -24 + 10\mathrm{i}$; $\delta = 1 + 5\mathrm{i}$; $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{3}$; $z_2 = \frac{1}{3} - \frac{\mathrm{i}}{2}$.

52 On effectue une translation : 0, $z - 1$, $\frac{1}{z} - 1$ et $-z$ sont cocycliques sur un cercle passant par O.

On utilise l'inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$. On obtient des points alignés sur une droite.

53 $S_1 = \{1+2\mathrm{i}\ ; 1-2\mathrm{i}\}$; $S_2 = \left\{\frac{2-\sqrt{2+2\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}\ ;\ \frac{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}-\mathrm{i}\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}\right\}$

55 $|\,z\,| = 1$

1°) **Donner un encadrement de $|\ 1 + z\ |$.**

On a : $|\,1+z\,|^2 = 2 + 2\,\mathrm{Re}\,z$.

Or $|\,z\,| = 1$ donc $\mathrm{Re}\,z \in [-1\ ;\ 1]$

Donc $|\,1+z\,|^2 \in [0\ ;\ 4]$

Par suite, $|\ 1 + z\ | \in [0\ ;\ 2]$

2°) **Exprimer la partie réelle de z en fonction de $|\ 1 + z\ |$.**

On a vu que $|\,1+z\,|^2 = 2 + 2\,\mathrm{Re}\,z$ donc $\mathrm{Re}\,z = \frac{|\,1+z\,|^2}{2} - 1$.

3°) **Exprimer $\left|\,1 - z + z^2\,\right|$ en fonction de Re (z) et de $\mathrm{Re}\left(z^2\right)$.**

$$\left|\,1-z+z^2\,\right|^2 = 1 + \left|\,z^2 - z\,\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z^2 - z\right)$$
$$= 1 + |\,z\,|^2\,|\,z-1\,|^2 + 2\left[\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Re}(z-1) - \mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}(z-1)\right]$$

Or $\mathrm{Re}(z - 1) = \mathrm{Re}\,z - 1$
$\mathrm{Im}\,(z - 1) = \mathrm{Im}\,z$

Donc $\left|\,1-z+z^2\,\right|^2 = 1 + |\,z-1\,|^2 + 2\left[\mathrm{Re}\,z\left(\mathrm{Re}\,z - 1\right) - \left(\mathrm{Im}\,z\right)^2\right]$
$= 1 + 2 - 2\,\mathrm{Re}\,z + 2\left[\left(\mathrm{Re}\,z\right)^2 - \left(\mathrm{Im}\,z\right)^2\right] - 2\,\mathrm{Re}\,z$

Comme $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = \left(\mathrm{Re}\,z\right)^2 - \left(\mathrm{Im}\,z\right)^2$,

alors $\left|\,1-z+z^2\,\right|^2 = 2\,\mathrm{Re}\left(z^2\right) - 4\,\mathrm{Re}\,z + 3$.

Donc $\left|\,1-z+z^2\,\right| = \sqrt{2\,\mathrm{Re}\left(z^2\right) - 4\,\mathrm{Re}\,z + 3}$

4°) **Démontrer que $\sqrt{3} \leqslant |\,1+z\,| + \left|\,1-z+z^2\,\right| \leqslant \frac{13}{4}$.**

Comme $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = \left(\mathrm{Re}\,z\right)^2 - \left(\mathrm{Im}\,z\right)^2 = \left(\mathrm{Re}\,z\right)^2 - \left(1 - \left(\mathrm{Re}\,z\right)^2\right) = 2\left(\mathrm{Re}\,z\right)^2 - 1$,

Donc $\left|\,1-z+z^2\,\right| = \sqrt{4\left(\mathrm{Re}\,z\right)^2 - 4\,\mathrm{Re}\,z + 1}$
$= |\ 2\ \mathrm{Re}\,z - 1\ |$
$= \left|\ |1+z|^2 - 3\right|$

$$|\,1+z\,| + \left|\,1-z+z^2\,\right| = t + \left|\,t^2 - 3\,\right|$$

Or $t = |\ 1 + z\ | \in [0\ ;\ 2]$ d'après le 1°).

- Si $t \in \left[\sqrt{3}\ ;3\right]$, $|\,1+z\,| + \left|\,1-z+z^2\,\right| = t^2 + t - 3 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \in \left[\sqrt{3}\ ;3\right]$

- Si $t \in \left[0\ ;\sqrt{3}\right[$, $|\,1+z\,| + \left|\,1-z+z^2\,\right| = -t^2 + t + 3 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} \in \left]\sqrt{3}\ ;\frac{13}{4}\right]$

$\boxed{56}$

1$^{\text{ère}}$ méthode : on pose $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$.

On développe $|2 + z_1 z_2|^2$. On trouve $\cos(\theta_1 + \theta_2) = -1$ donc $\theta_1 + \theta_2 = \pi + 2k\pi$.

Donc $z_1 z_2 = e^{i\pi} = -1$.

2$^{\text{e}}$ méthode :

On développe $|2 + z_1 z_2|^2$. On trouve $\text{Re}(z_1 z_2) = -1$.

On calcule de nouveau : $|2 + z_1 z_2|^2 = 1 + (\text{Im}\, z_1 z_2)^2$.

On trouve : $\text{Im}\, z_1 z_2 = 0$.

Donc $z_1 z_2 = -1$.

Variante : on calcule $|z_1 z_2|^2 = (\text{Re}\, z_1 z_2)^2 + (\text{Im}\, z_1 z_2)^2$

$\boxed{57}$ **Question préliminaire :**

a, b, c trois réels positifs.

Démontrons que si $a \leqslant b + c$, alors $\dfrac{a}{1+a} \leqslant \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c}$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$.

Cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Donc $f(a) \leqslant f(b+c)$.

Or $f(b+c) = \dfrac{b+c}{1+b+c} = \dfrac{b}{1+b+c} + \dfrac{c}{1+b+c}$ …

Application :

Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n nombres complexes ($n \in \mathbb{N}^*$).

Démontrer que l'on a : $\dfrac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1 + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dfrac{|z_k|}{1+|z_k|}$.

$\boxed{59}$ Image du réseau des droites parallèles à l'axe (Ox) et du réseau des droites parallèles à l'axe (Oy) par l'application $z \mapsto e^z$. (Transformation conforme et théorème de Riemann : préservation des angles).

$\boxed{60}$ On se ramène au cercle trigonométrique.

A : e^{ia} B : e^{ib} C : e^{ic} D : e^{id}

P : $e^{i\frac{a+b}{2}}$ Q : $e^{i\frac{b+c}{2}}$ R : $e^{i\frac{c+d}{2}}$ S : $e^{i\frac{d+a+2\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{d+a}{2}+\pi\right)}$

$$\frac{z_S - z_Q}{z_R - z_S} = \frac{e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \times \cancel{2}i \sin\left(\dfrac{a+d-(b+c)}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right)}{e^{i\theta} \times \cancel{2}i \sin\left(\dfrac{a+d-(b+c)}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right)} = i \times \text{un réel} \quad \text{avec } \theta = \frac{a+b+c+d}{4}$$

$\boxed{61}$ 1°) $E = (\text{O}y)$ 2°) $F = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Delta_k$ avec $\Delta_k : y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{66}$ On écrit : $|u| + |v| = \left|\dfrac{u+v}{2} + \dfrac{u-v}{2}\right| + \left|\dfrac{u+v}{2} - \dfrac{u-v}{2}\right|$.

On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

$$\left|\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right| + \left|\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right| \leqslant \sqrt{1+1} \times \sqrt{\left|\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right|^2 + \left|\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right|^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{|u+v|^2}{2} + \frac{|u-v|^2}{2}}$$

$\boxed{67}$ ABCD est un carré.

On peut prendre $z = \dfrac{a+b+c+d}{4}$.

Idée : changement de repère mais pas à conserver dans la mise au propre.

$\boxed{68}$

$$S = \sum_{q=0}^{2n-1} \sum_{k=0}^{2p} \frac{C_{2p}^k}{2^{2p}} e^{i4(k-p)\left(x+\frac{q\pi}{2n}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k \; e^{i4(k-p)\pi} \sum_{q=0}^{2n-1} \left(e^{i\frac{2(k-p)\pi}{n}}\right)^q$$

$k - p = ln$

$k = p + ln$

$0 \leqslant k \leqslant 2p$

$0 \leqslant p + ln \leqslant 2p$

$-p \leqslant ln \leqslant p$ vrai que pour $l = 0$ car $n > 2p$

$$S = \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p \times 2n = \frac{nC_{2p}^p}{2^{2p-1}}$$

QUESTIONS DE COURS

$\boxed{1}$ Formules d'Euler ; factorisations de $e^{ix} \pm 1$ où x est un réel quelconque.
Factorisation de $e^{i\alpha} \pm e^{i\beta}$.

$\boxed{2}$ Racines n-ièmes de l'unité (forme exponentielle) ; représentation dans le plan complexe (propriété de la figure obtenue lorsque $n \geqslant 3$).

$\boxed{3}$ Module d'un nombre complexe : donner la définition et l'interprétation géométrique correspondante, énoncer les différentes propriétés ; démontrer l'inégalité triangulaire et donner une interprétation géométrique. Donner l'inégalité qui se déduit de l'inégalité triangulaire.

$\boxed{4}$ Racines carrées d'un nombre complexe. Recherche des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

$\boxed{5}$ Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes.

$\boxed{6}$ Argument d'un nombre complexe non nul : donner la définition et l'interprétation géométrique correspondante, énoncer les différentes propriétés ; démontrer l'une de ces propriétés.

$\boxed{7}$ Ensemble des nombres de module 1. Propriétés de cet ensemble.

$\boxed{8}$ **Application géométriques des nombres complexes.**

En utilisant l'argument :

- caractériser la colinéarité et l'orthogonalité de deux vecteurs non nuls à l'aide de leurs affixes.
- caractériser l'appartenance d'un point à une droite définie par deux points distincts à l'aide de leurs affixes.
- caractériser l'appartenance d'un point à un cercle défini par un diamètre à l'aide de leurs affixes.

$\boxed{9}$ Ensemble des points M(z) du plan complexe tels que l'on ait : $\arg \dfrac{z-a}{z-b} = \alpha \ (\pi)$ où α est un réel fixé et a et b deux complexes distincts fixés.

$\boxed{10}$ Définition de $u^{[z]}$ où u est un réel strictement positif et z un nombre complexe.
Propriétés.

$\boxed{11}$ Factorisation canonique d'un polynôme du second degré.

$\boxed{12}$ Somme et produit des racines d'une équation du second degré.

$\boxed{13}$ Condition de cocyclicité de quatre points deux à deux distincts M_1, M_2, M_3, M_4 (alignement ou cocyclicité) à l'aide de leurs affixes (birapport) ou à l'aide des angles.

$\boxed{14}$ Compléter $e^{z} = 1 \Leftrightarrow$ …………….. ; $e^{z} = e^{z'} \Leftrightarrow$ ……………… .

$\boxed{15}$ Équation paramétrique de cercle complexe.