Exercices de probabilités (probabilités conditionnelles)

Les exercices $\boxed{10}$ et $\boxed{13}$ marchent ensemble, ainsi que le $\boxed{25}$.

$\boxed{1}$ En 2005, un laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de la disparition d'une espèce animale et fournit les renseignements suivants :
« La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».
Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est strictement supérieure à 0,999.
Ce test est-il fiable ?

$\boxed{2}$ On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose de n sacs de jetons S_1, …, S_n. Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc. On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs, effectués de la façon suivante.

- **Première étape :** on tire au hasard un jeton dans S_1.
- **Deuxième étape :** on place ce jeton dans S_2 et on tire, au hasard, un jeton dans S_2.
- **Troisième étape :** après avoir placé dans S_3, … et ainsi de suite …

Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note E_k l'événement « Le jeton sorti de S_k est blanc » et on note p_k sa probabilité.
1°) Exprimer p_{k+1} en fonction de p_k.
2°) En déduire p_k en fonction de k et déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} p_k$.

$\boxed{3}$ Une commission détaille ainsi les résultats d'un test mis en place pour le diagnostic d'une maladie animale :
La proportion des réactions positives au test effectué sur un animal malade est égale à 70 %.
La proportion des réactions négatives au test effectué sur un animal sain est égale à 90 %.
On estime à x la fréquence d'animaux malades ($x \in [0\,;1]$).
1°) Calculer en fonction de x la probabilité que l'animal soit malade sachant que le test est positif.
2°) Déterminer pour quelles valeurs de x cette probabilité est supérieure ou égale à 0,9.

$\boxed{4}$ Alice débute au jeu des fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.
On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère l'événement
A_n : « Alice atteint la cible au n-ième coup ».
On pose $p_n = P(A_n)$.
1°) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2°) Exprimer p_n en fonction de n ; en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

$\boxed{5}$ Trois machines A, B, C fabriquent des ampoules électriques dans les proportions suivantes :
20 % sont fabriquées par la machine A, 50 % par la machine B et 30 % par la machine C.
Les probabilités que les ampoules fabriquées par les machines A, B, C soient bonnes sont respectivement 0,9, 0,95 et 0,8.
1°) Calculer la probabilité pour qu'une ampoule soit bonne (valeur exacte).
2°) On achète une ampoule : elle est bonne.
Quelle est la probabilité pour qu'elle ait été fabriquée par la machine A ? (valeur arrondie au millième).

$\boxed{6}$ On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est égale à $\frac{2}{3}$ tandis que celle d'avoir face est égale à $\frac{1}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants.
Soit n un entier naturel non nul.
On note A_n l'événement « on obtient pour la première fois deux piles consécutifs au n-ième lancer, le deuxième pile étant au n-ième lancer ». On note p_n la probabilité de l'événement A_n.
1°) Expliciter les événements A_1, A_2, A_3 et A_4. Déterminer les valeurs de p_1, p_2, p_3 et p_4.
2°) Pour $n \geqslant 3$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1} et de p_{n-2}.
On pourra introduire l'événement E : « On obtient pile au premier lancer ».
3°) En déduire l'expression de p_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$, puis sa limite.

$\boxed{7}$ On se place dans un univers probabilisé (Ω, P).
On dit d'un événement F qu'il **informe négativement** sur un événement E, et on note $F \downarrow E$, quand $P(E / F) \leqslant P(E)$.
Démontrer ou donner un contre-exemple à chacune des assertions suivantes :
1°) Si $F \downarrow E$, alors $E \downarrow F$.
2°) Si $F \downarrow E$ et $G \downarrow E$, alors $F \cap G \downarrow E$.
3°) Si $F \downarrow E$ et $E \downarrow G$, alors $F \downarrow G$.

$\boxed{8}$ Une urne contient n boules blanches et n boules noires.
On effectue n tirages au hasard d'une boule sans remise dans l'urne.
Quelle est la probabilité que les n boules tirées soient blanches ?

$\boxed{9}$ On dispose de deux pièces de monnaie A et B. La pièce A est équilibrée mais la pièce B donne « face » avec une probabilité $\frac{2}{3}$. On choisit une pièce au hasard et on la lance. Si on obtient « face », on la garde ; sinon on change de pièce. On lance ainsi n fois $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1)$ une pièce selon ce procédé et on considère l'événement E_n : « Le n-ième lancer s'effectue avec la pièce A ». On pose $p_n = P(E_n)$.
1°) Déterminer p_1.
2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a : $p_n = \frac{1}{6} p_{n-1} + \frac{1}{3}$.
3°) Exprimer p_n en fonction de n.
4°) Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir pile au n-ième lancer.

$\boxed{10}$ Une urne contient n boules blanches et n boules noires (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
On effectue n tirages au hasard d'une boule sans remise dans l'urne.
Quelle est la probabilité p_n que les n boules tirées soient blanches ?
Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

$\boxed{11}$ Une urne contient trois boules blanches et sept boules noires. On tire successivement et au hasard n (n entier naturel supérieur ou égal à 1) boules dans l'urne de sorte qu'après chaque tirage, la boule tirée soit remise dans l'urne si elle est noire, et non remise sinon.
Calculer la probabilité d'obtenir sur les n tirages une seule boule blanche.

$\boxed{12}$ On considère deux jetons J_1 et J_2 équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer). Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1. Un joueur choisit au hasard un jeton, puis effectue une série de lancers avec ce jeton.
1°) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
2°) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ?
Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ? Interpréter ce résultat.

$\boxed{13}$ Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire.
On effectue des tirages successifs de la manière suivante : après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on ajoute une boule blanche.
Calculer la probabilité de n'obtenir que des boules blanches au cours des n premiers tirages.

$\boxed{14}$ Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :
- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.
1°) Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
2°) Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les n premières parties.

$\boxed{15}$ Dans tout l'exercice, on se place dans un univers probabilisé (Ω, P).
1°) Démontrer que pour tout n-uplet $\left(E_1, E_2, ..., E_n\right)$ d'événements de Ω, on a $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P\left(E_i\right)$.
2°) Soit A, B, C trois événements de Ω.
On suppose que A, B, C ont la même probabilité p et vérifient $P\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}\right)=0$.
Démontrer que l'on a : $p \leqslant \dfrac{2}{3}$.
Indication : Appliquer l'inégalité établie à la question précédente à $\overline{\mathrm{A}}$, $\overline{\mathrm{B}}$, $\overline{\mathrm{C}}$.

$\boxed{16}$ On lance n dés cubiques ($n \geqslant 2$).
On sait que l'un des dés au moins a amené le numéro 1.
Quelle est la probabilité qu'on ait obtenu deux fois ou plus le numéro 1 ?

$\boxed{17}$ On considère n urnes U_1, U_2, … U_n contenant chacune n boules (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1). Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, l'urne U_k contient k boules blanches, les autres étant noires.
On choisit une urne au hasard, puis une boule au hasard dans cette urne.
1°) a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ? On donnera le résultat en fonction de n.
b) Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers $+\infty$?
2°) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne U_k sachant qu'elle est blanche ?

$\boxed{18}$ Un homme cherche son parapluie qui se trouve dans un immeuble de n étages (rez-de-chaussée compris) avec la probabilité $p \in \left]0\,;1\right[$. Il a exploré en vain les $n-1$ premiers niveaux.
Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au dernier étage ? On admettra qu'il n'y a pas a priori d'étage privilégié.

$\boxed{19}$ Il y a 90 % de chances qu'un dangereux malfaiteur se soit réfugié au hasard dans l'une des 30 maisons d'un petit hameau. Les policiers ont fouillé en vain les 29 maisons sur les 30. Quelle est alors la probabilité que le malfaiteur se trouve dans la dernière maison du hameau ?

$\boxed{20}$ On lance n fois de suite un dé équilibré à six faces et on note p_n la probabilité que la somme des numéros obtenus soit paire.
1°) Calculer p_1 et p_2.
2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $p_n = \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{21}$ On dispose de trois urnes U_1, U_2, U_3 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient k boules rouges et 2 boules noires.
U_2 contient 2 boules rouges et 1 boule noire.
U_3 contient 3 boules noires.
On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2 puis on tire une boule au hasard dans U_2 et on la place dans U_3. On tire enfin au hasard une boule de U_3.
L'ensemble de ces 3 opérations constitue l'expérience aléatoire. Pour $i \in \left\{1, 2, 3\right\}$, on définit le événements R_i : « On tire une boule rouge dans l'urne U_i » et N_i : « On tire une boule noire dans l'urne U_i ».
1°) a) Calculer $P\left(\mathrm{R}_1\right)$ et $P\left(\mathrm{N}_1\right)$.
b) Calculer $P\left(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \mathrm{R}_3\right)$ en fonction de k.
c) Calculer $P\left(\mathrm{R}_3\right)$ en fonction de k.
d) Démontrer que R_1 et R_3 ne sont pas indépendants quelle que soit la valeur de k.
2°) On considère que $k=2$ et que la boule placée dans l'urne U_3 est replacée dans l'urne U_1.
a) Sachant que la boule prélevée dans U_3 et arrivant dans U_1 est rouge, quelle est la probabilité que la boule initialement tirée dans U_1 ait été rouge ?
b) Déterminer la probabilité de l'événement E : « La composition des urnes U_1 et U_3 est inchangée à l'issue de l'expérience aléatoire ».

$\boxed{22}$ Soit n un entier naturel non nul fixé.
Une urne numérotée 0 contient 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2, 3 jetons numérotés 3, … n jetons numérotés n.
On dispose ensuite n urnes numérotées de 1 à n de sorte que pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$, l'urne numérotée k contient k boules blanches et $\left(n-k\right)$ boules rouges.
On tire au hasard un jeton dans l'urne numérotée 0 : on note k le numéro du jeton tiré et on tire au hasard une boule dans l'urne numérotée k.
Calculer la probabilité de l'événement E : « La boule tirée est blanche ».

23 On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante : les tirages se font avec remise des boules.
La première épreuve consiste à tirer au hasard une boule dans l'urne U_3.
Si j est le numéro de la boule tirée à la k-ième épreuve ($k \geqslant 1$), on tire une boule au hasard dans l'urne U_j à la $(k+1)$-ième épreuve.
On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la k-ième épreuve.
Compte tenu des hypothèses qui précèdent, on convient de poser $X_0 = 3$. On note alors M_k la matrice unicolonne définie par $M_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \\ P(X_k = 3) \end{pmatrix}$ où $P(X_k = j)$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la k-ième épreuve.
1°) Déterminer une matrice A telle que pour tout entier naturel k, on a : $M_{k+1} = AM_k$.
On pourra représenter la situation par un graphe probabiliste.
2°) Démontrer qu'il existe un unique état stable S tel que $S = AS$. Interpréter et commenter le résultat obtenu.
3°) On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
4°) Expliciter alors les probabilités $P(X_k = 1)$, $P(X_k = 2)$ et $P(X_k = 3)$ en fonction de k.
Déterminer les limites de ces probabilités lorsque k tend vers $+\infty$.
5°) Calculer l'espérance de X_k en fonction de k, puis sa limite lorsque k tend vers $+\infty$.

24 On lance un dé équilibré à quatre faces (numérotées de 1 à 4) n fois de suite. On note p_n la probabilité que les quatre chiffres (1, 2, 3, 4) apparaissent au moins une fois lors des n lancers. Pour tout nombre entier $i \in \{1\,;2\,;3\,;4\}$, on note A_i l'événement « le numéro i n'apparaît pas durant les n tirages ».
1°) Calculer $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.
2°) En déduire que $p_n = 1 - 4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 6\times\left(\frac{2}{4}\right)^n - 4\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.
3°) Déterminer à l'aide de la calculatrice la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0{,}9$.

25 Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules vertes. On tire une par une, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de couleur différente à chaque tirage ?

26 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. On considère deux événements A et B et (C_i) une partition de Ω.
1°) Calculer $P(B/A)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A/B)$.
2°) Connaissant $P(B)$, $P(A/B)$, $P(A/C_i)$ et $P(C_i)$, calculer $P(B/A)$.
Application :
Soit p_i la probabilité pour qu'un couple ait exactement i enfants.
Calculer la probabilité pour qu'un couple ait un enfant unique sachant qu'il n'a pas de fille.
L'application ne va pas (je l'ai donné en colle le 13-5-2016). Il faut que je l'enlève.

27 Prendre DM Mme Bonnaz appariement génétique

28 Soit N et n deux entiers naturels tels que $N \geqslant 2$ et $1 \leqslant n < N$.
Une urne contient N boules : n blanches et $N - n$ noires.
On tire une première boule dans l'urne et l'on note sa couleur.
On tire ensuite une deuxième boule dans l'urne et l'on note sa couleur.
On précise que la première boule tirée n'est pas remise dans l'urne.
On note la couleur de chacune des deux boules tirées.
1°) On note B_1 l'événement : « La première boule tirée est blanche » et B_2 l'événement : « La deuxième boule tirée est blanche ».
Exprimer en fonction de n et de N la probabilité de B_2.
On donnera l'expression de cette probabilité sous forme simplifiée.
Que remarque-t-on ?
2°) On note X la variable aléatoire qui est égale au nombre de couleurs obtenues à l'issue des deux tirages.
a) Déterminer la loi de probabilité de X (en fonction de n et de N).
b) Calculer l'espérance de X.

29 On lance deux dés cubiques non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Quelle est la probabilité d'obtenir une somme strictement supérieure à 5 sachant que les deux numéros obtenus sont différents ?

30 Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher, d'un sac contenant une boule noire et neuf boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir le six avec le dé pour gagner.
On note A l'événement « La boule noire figure parmi les boules tirées » et B l'événement « Le joueur gagne ».
1°) Exprimer $P(A)$ en fonction de n.
2°) Exprimer $P(B)$ en fonction de n.

31 Un homme voyage chaque jour en train ou en avion.
- S'il prend le train au jour j, il prend l'avion au jour $j+1$ une fois sur trois.
- S'il prend l'avion le jour j, il prend le train au jour $j+1$.

Le jour 1, il prend le train.
On note A_j l'événement « Il prend le train au jour j » et l'on note p_j la probabilité de A_j autrement dit $p_j = P(A_j)$.
1°) Quelle est la valeur de p_1 ?
2°) a) En utilisant la formule des probabilités totales, établir une relation entre p_j et p_{j+1}.
b) Rédiger un algorithme pour calculer p_{10}. Programmer cet algorithme sur calculatrice et donner une valeur approchée de p_{10}.
3°) Exprimer p_j en fonction de j.
4°) Déterminer la limite de p_j lorsque j tend vers $+\infty$.

31 bis Un voyageur X peut prendre le train ou l'avion. Si au jour $i-1$ il prend le train, la probabilité qu'il prenne l'avion au jour i est 0,5. Si au jour $i-1$, il prend l'avion, il prend le train au jour i. Soit p_n la probabilité que X prenne le train au jour n.
Donner l'expression de p_n en fonction de n, sachant qu'au premier jour, X prend le train.
Indication : Donner une relation entre p_{n+1} et p_n.

$\boxed{32}$ On considère une pièce telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer est égal est égale à p.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement « obtenir pile au n-ième lancer et face au $(n+1)$-ième lancer » et l'on note u_n la probabilité de l'événement E_n.
On pose $q = 1 - p$.
1°) Calculer u_1, u_2, u_3.
2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = qu_{n-1} + p^n q$.
3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{q^n}$. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

$\boxed{33}$ On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'apparition de PILE (P) est de $\dfrac{2}{3}$.
On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang n $(n \geqslant 2)$ s'il y a un PILE au rang n et au rang $n-1$, mais qu'il n'y a pas un double PILE au rang $n-1$.

1°) **Étude d'un exemple**
On considère les 13 lancers suivants :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P	F	P	P	P	P	P	P	F	F	P	P	P
SP	F	SP	DP	SP	DP	SP						

Recopier ce tableau et compléter la dernière ligne par les indications (F : face, SP : simple PILE, DP : double PILE).

2°) Pour n entier naturel non nul, on note B_n l'événement « la première apparition d'un double PILE se situe au rang n », et b_n sa probabilité.
a) Déterminer b_1, b_2, b_3 et b_4.
b) On note P_n l'événement « il y a apparition d'un PILE au rang n » et F_n l'événement « il y a apparition d'un FACE au rang n ».
Exprimer $P_{F_1}(B_{n+2})$ en fonction de $P(B_{n+1})$.
Exprimer $P_{P_1 \cap F_2}(B_{n+2})$ en fonction de $P(B_n)$, puis $P_{P_1}(B_{n+2})$ en fonction de $P(B_n)$.
c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n : $b_{n+2} = \dfrac{1}{3} b_{n+1} + \dfrac{2}{9} b_n$.
3°) Soit C_n l'événement « il n'y a aucune apparition d'un double Pile au cours des n premiers lancers » et c_n sa probabilité.
a) Exprimer l'événement contraire de C_n à l'aide des événements B_1, B_2, …, B_n.
b) Déterminer la probabilité c_n.
c) Quelle est la limite de la suite (c_n) ? Interpréter le résultat.

$\boxed{34}$ Au tennis, le joueur qui « est au service » joue une première balle.
Si elle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si elle est jugée « faute », il joue une deuxième balle.
Si cette deuxième balle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si cette deuxième balle est jugée « faute », il perd.

Pour le joueur X qui est au service, on dispose des données suivantes :
• sa première balle de service est jugée « bonne » dans 40 % des cas ;
• sa deuxième balle de service est jugée « bonne » dans 95 % des cas ;
• si sa première balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 80 % des cas ;
• si sa deuxième balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 60 % des cas.
1°) Calculer la probabilité que le joueur X gagne l'échange.
2°) Sachant que le joueur X a gagné l'échange, calculer la probabilité que sa première balle de service ait été jugée « bonne ». Le résultat sera arrondi au millième.

$\boxed{35}$ Trois enfants Alice, Bob et Carmen jouent avec une balle.
• Lorsque Alice a la balle, la probabilité qu'elle l'envoie à Bob est 0,75 et la probabilité qu'elle l'envoie à Carmen est 0,25.
• Lorsque Bob a la balle, il l'envoie à Alice avec une probabilité de 0,75 et à Carmen avec une probabilité de 0,25.
• Carmen envoie toujours la balle à Bob.
On désigne respectivement par a_n, b_n et c_n les probabilités pour qu'à l'issue du n-ième lancer, ce soit Alice, Bob ou Carmen qui ait la balle. a_0, b_0 et c_0 représentent une probabilité initiale de possession de la balle. Par exemple, si on précise que Alice a initialement la balle, alors $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1°) Démontrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre 3 que l'on notera M, telle que pour tout entier naturel n, on a $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

2°) On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $M = PDP^{-1}$. En déduire la matrice M^n pour n entier naturel quelconque.
3°) Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des probabilités a_n, b_n et c_n. Ces limites dépendent-elles de l'enfant qui avait la balle au début de jeu ?

Solutions

$\boxed{1}$ $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = 0{,}9989909...$ (test non fiable)

$\boxed{2}$ 1°) $p_{k+1} = \frac{1}{3}(p_k + 1)$; 2°) $p_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

$\boxed{3}$ 1°) $\frac{7x}{6x+1}$; 2°) $x \in \left[\frac{9}{16} ; 1\right]$

$\boxed{4}$ 1°) $p_{n+1} = \frac{2}{15} p_n + \frac{1}{5}$; 2°) $p_n = \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}$

$\boxed{5}$ 1°) 0,895 ; 2°) 0,201

$\boxed{6}$ 1°) $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{4}{9}$, $p_3 = \frac{4}{27}$, $p_4 = \frac{4}{27}$ (on a $p_4 = p_3$, résultat surprenant mais néanmoins vrai)

2°)

$$\begin{aligned}
p_n &= P(\mathrm{A}_n) \\
&= P(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{E}) + P(\mathrm{A}_n \cap \overline{\mathrm{E}}) \\
&= P(\mathrm{E}) \times P(\mathrm{A}_n / \mathrm{E}) + P(\overline{\mathrm{E}}) \times P(\mathrm{A}_n \cap \overline{\mathrm{E}}) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times p_{n-2} + \frac{1}{3} \times p_{n-1}
\end{aligned}$$

$$p_n = \frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{2}{9} p_{n-2}$$

3°) $p_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$; $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$

$\boxed{7}$

1°) Si $\mathrm{F} \downarrow \mathrm{E}$, alors $\mathrm{E} \downarrow \mathrm{F}$.

2°) Si $\mathrm{F} \downarrow \mathrm{E}$ et $\mathrm{G} \downarrow \mathrm{E}$, alors $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \downarrow \mathrm{E}$.

$\mathrm{E} = \{1 ; 3 ; 5\}$; $\mathrm{F} = \{1 ; 2\}$; $\mathrm{G} = \{1 ; 3 ; 4 ; 6\}$

$$P(\mathrm{E/F}) = \frac{1}{2} = P(\mathrm{E})$$

$$P(\mathrm{E/G}) = \frac{1}{2} = P(\mathrm{E})$$

$$P(\mathrm{E/F} \cap \mathrm{G}) = 1$$

3°) Si $\mathrm{F} \downarrow \mathrm{E}$ et $\mathrm{E} \downarrow \mathrm{G}$, alors $\mathrm{F} \downarrow \mathrm{G}$.

On considère le lancer d'un dé cubique équilibré.

E : « tirer un nombre pair »

$\mathrm{F} = \mathrm{G} = \{1 ; 3 ; 5 ; 6\}$

$P(\mathrm{E/F}) = \frac{1}{4}$; $P(\mathrm{G/E}) = \frac{1}{3}$; $P(\mathrm{G/F}) = 1$

Pour justifier, il suffit d'avoir $\mathrm{F} = \mathrm{G}$ et $\mathrm{F} \neq \Omega$.

Si $\mathrm{F} \neq \Omega$, $P(\mathrm{F}) < P(\mathrm{F/G})$.

$\boxed{9}$

3°) $p_n = \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$ ou $p_n = \frac{1}{10 \times 6^{n-1}} + \frac{2}{5}$

4°) Introduire l'événement F_n : « obtenir pile au *n*-ième lancer »

$$P(\mathrm{F}_n) = \frac{1}{2} \times p_n + \frac{1}{3} \times (1 - p_n) = \frac{1}{6} \times p_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{5}$$

On peut observer que cette probabilité est aussi égale à p_{n+1} (apparaît dès lors que l'on a écrit $P(\mathrm{F}_n) = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{3}$).

$\boxed{10}$ Voir ex. $\boxed{13}$ pour les notations

Pour tout entier naturel *i* compris entre 1 et *n* (au sens large), on note E_i l'événement « obtenir une boule blanche au *i*-ième tirage ».

D'après la formule des probabilités composées :

$$p_n = P(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap ... \cap \mathrm{E}_n)$$

$$p_n = P(\mathrm{E}_1) \times P(\mathrm{E}_2/\mathrm{E}_1) \times P(\mathrm{E}_3/\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2) \times ... \times P(\mathrm{E}_n/\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap ... \cap \mathrm{E}_{n-1})$$

$$p_n = \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \frac{n-2}{2n-2} \times ... \times \frac{n-(n-1)}{2n-(n-1)}$$

On peut écrire : $p_n = \prod\limits_{i=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-k}$ ou $p_n = \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{n+i}$ ou $p_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ou encore $p_n = \frac{1}{\binom{n}{2n}}$.

Grâce à la formule de Stirling, on obtient l'équivalent suivant : $p_n \sim \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}$.

$\boxed{11}$

E_k : « la boule tirée au *k*-ième lancer est blanche »
F_k : « la boule tirée au *k*-ième lancer est noire »

On cherche la probabilité *p* de l'événement $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (\mathrm{F}_1 \cap ... \cap \mathrm{F}_{k-1} \cap \mathrm{E}_k \cap \mathrm{F}_{k+1} \cap ... \cap \mathrm{F}_n)$.

$$p=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}\times\frac{3}{10}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n-k+1}$$
$$=\frac{3}{10}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{3}{\cancel{10}}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n}\times\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n}}{\frac{1}{\cancel{10}}}$$
$$=\frac{3}{\cancel{10}}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n}\times\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n}}{\frac{1}{\cancel{10}}}$$
$$=3\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n}\times\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n}\right]$$
$$=3\times\left[\left(\frac{7}{9}\right)^{n}-\left(\frac{7}{10}\right)^{n}\right]$$

12

1°) $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

2°) $\frac{1}{2^n+1}$

13 On a une urne à composition évolutive (il ne s'agit pas d'un schéma de Bernoulli)

On utilise la formule des probabilités composées :

$$P\left(B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_n\right)=P\left(B_1\right)\times P\left(B_2/B_1\right)\times P\left(B_3/B_1\cap B_2\right)\times\ldots\times P\left(B_n/B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_{n-1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{n}{n+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}$$

On peut faire un tableau présentant la composition de l'urne étape par étape (comme pour un tableau d'évolution de variables algorithmiques).

Chaque probabilité conditionnelle se calcule par logique et non par formule.

14

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on note A_n l'événement « le joueur gagne la *n*-ième partie ».

1°) Il s'agit de calculer :

$$P\left(\overline{A_1}/A_2\right)=\frac{P\left(\overline{A_1}\cap A_2\right)}{P\left(\overline{A_1}\cap A_2\right)+P\left(A_1\cap A_2\right)}$$
$$=\frac{0,9\times 0,6}{0,9\times 0,6+0,1\times 0,8}$$
$$=\frac{27}{31}$$

2°) $1-P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right)=1-0,9\times\left(0,4\right)^{n-1}$

15 1°) Faire une récurrence.

16

On considère les événements :
A : « un dé au moins a amené l'as » ;
B : « obtenir deux as ou plus ».

$B\subset A$ donc $A\cap B=B$

$$P\left(B/A\right)=\frac{P\left(B\right)}{P\left(A\right)}$$

On doit calculer $P\left(A\right)$ et $P\left(B\right)$.

$$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)$$
$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$

$$P\left(B\right)=1-P\left(\overline{B}\right)$$
$$=1-\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n}+\binom{1}{n}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right]$$
$$=1-\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n}+\frac{n}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right]$$

17

1°) On fait un arbre avec les événements E_i : « choisir l'urne U_i » et A : « tirer une boule blanche ».

La famille $\left(E_i\right)$ constitue un système complet d'événements.

Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{A}) &= \sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \times \frac{i}{n}\right) \qquad \text{(car } P(\mathrm{E}_i) = \frac{1}{n} \text{ et } P(\mathrm{A/E}_i) = \frac{i}{n}\text{)} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

2°) $P(\mathrm{E}_k / \mathrm{A}) = \dfrac{\frac{k}{n^2}}{\frac{n+1}{2n}} = \dfrac{2k}{n(n+1)}$

18

Autre formulation de l'énoncé :
« Un homme cherche son parapluie qui se trouve dans un immeuble de sept étages (rez-de-chaussée compris) avec la probabilité $p \in \left]0\,;1\right[$. Il a exploré en vain les six premiers niveaux, quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au dernier étage ? On admettra qu'il n'y a pas a priori d'étage privilégié. »

On définit les événements E : « le parapluie est dans l'immeuble » et A_i : « le parapluie est à l'étage i ».
On cherche $P\left(\mathrm{A}_n / \overline{\mathrm{A}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap ... \cap \overline{\mathrm{A}_{n-1}}\right)$.

$$\begin{aligned} P\left(\mathrm{A}_n / \overline{\mathrm{A}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap ... \cap \overline{\mathrm{A}_{n-1}}\right) &= \frac{P\left(\mathrm{A}_n \cap \overline{\mathrm{A}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap ... \cap \overline{\mathrm{A}_{n-1}}\right)}{P\left(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap ... \cap \overline{\mathrm{A}_{n-1}}\right)} \\ &= P(\mathrm{A}_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap ... \cap \overline{\mathrm{A}_{n-1}}\right) &= P\left(\overline{\mathrm{A}_1 \cup ... \cup \mathrm{A}_n}\right) \\ &= 1 - P(\mathrm{A}_1 \cup ... \cup \mathrm{A}_n) \\ &= 1 - \left[P(\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2) + ... + P(\mathrm{A}_{n-1})\right] \\ &= 1 - \left[P(\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2) + ... + P(\mathrm{A}_{n-1})\right] \end{aligned}$$
(car A_1, A_2 … A_{n-1} sont deux à deux incompatibles)

$$P(\mathrm{A}_i) = P(\mathrm{E}) \times P(\mathrm{A}_i / \mathrm{E}) = p \times \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$$

$$P\left(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap ... \cap \overline{\mathrm{A}_{n-1}}\right) = 1 - (n-1)\frac{p}{n}$$

$$\begin{aligned} P\left(\mathrm{A}_n / \overline{\mathrm{A}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap ... \cap \overline{\mathrm{A}_{n-1}}\right) &= \frac{\frac{p}{n}}{1 - \frac{(n-1)p}{n}} \\ &= \frac{p}{n-(n-1)p} \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

19

$$P(\mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2 \cup \mathrm{M}_3 \cup ... \cup \mathrm{M}_{30}) = 0{,}9$$

Les événements sont incompatibles.

Donc $P(\mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2 \cup \mathrm{M}_3 \cup ... \cup \mathrm{M}_{30}) = P(\mathrm{M}_1) + P(\mathrm{M}_2) + ... + P(\mathrm{M}_{30}) = 30P(\mathrm{M}_k)$.

$$P(\mathrm{M}_k) = \frac{0{,}9}{30} = 0{,}13$$

Le voleur ne s'est pas réfugié dans l'une des 29 maisons.

$P(\mathrm{B}) = 0{,}03 \times 29 = 0{,}87$ donc $P\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = 1 - P(\mathrm{B}) = 0{,}13$.

$$P\left(\mathrm{M}_{30} / \overline{\mathrm{B}}\right) = \frac{P\left(\overline{\mathrm{B}} \cap \mathrm{M}_{30}\right)}{P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)} = \frac{P(\mathrm{M}_{30})}{0{,}13} = \frac{0{,}03}{0{,}13} = \frac{3}{13}$$

20 2°) $p_n = p_{n-1} \times \dfrac{1}{2} + (1 - p_{n-1}) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

21

1°) a) $P(\mathrm{R}_1) = \dfrac{k}{k+2}$; $P(\mathrm{N}_1) = \dfrac{2}{k+2}$

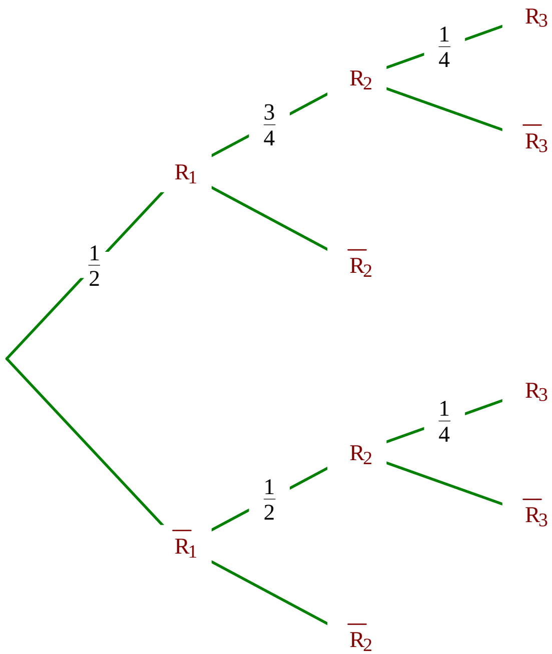
b) $P(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \mathrm{R}_3) = \dfrac{3k}{16(k+2)}$

c) $P(\mathrm{R}_3) = \dfrac{3k}{16(k+2)} + \dfrac{1}{k+2} = \dfrac{3k+16}{16(k+2)}$

d) Démontrer que R_1 et R_3 ne sont pas indépendants quelle que soit la valeur de k.

2°) On considère que $k = 2$ et que la boule placée dans l'urne U_3 est replacée dans l'urne U_1.

a)

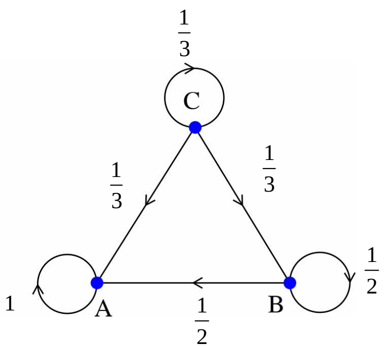


$$P\left(\mathrm{R}_1 / \mathrm{R}_3\right)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{32}}=\frac{\frac{3}{32}}{\frac{5}{32}}=\frac{3}{5}$$

b) $P\left(\mathrm{E}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{32}+\frac{16}{32}=\frac{19}{32}$

23 1°) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$; 2°) $\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\mathrm{M}_0=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$



On note A l'état « effectuer le tirage dans l'urne 1 », B l'état « effectuer le tirage dans l'urne 2 », C l'état « effectuer le tirage dans l'urne 3 ».
On peut tout simplement écrire 1, 2, 3 sur le graphe probabiliste à la place de A, B, C.

2°) L'état stable S est $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Il s'agit de l'état stable naturel. Quand on tire dans l'urne 1, on n'en sort pas.

3°)

$$P\left(\mathrm{X}_{k+1}=1\right)=P\left(\mathrm{X}_k=1\right)+\frac{1}{2}P\left(\mathrm{X}_k=2\right)+\frac{1}{3}P\left(\mathrm{X}_k=3\right)$$
$$P\left(\mathrm{X}_{k+1}=2\right)=\frac{1}{2}P\left(\mathrm{X}_k=2\right)+\frac{1}{3}P\left(\mathrm{X}_k=3\right)$$
$$P\left(\mathrm{X}_{k+1}=3\right)=\frac{1}{3}P\left(\mathrm{X}_k=3\right)$$

On peut éventuellement utiliser le logiciel dcode.

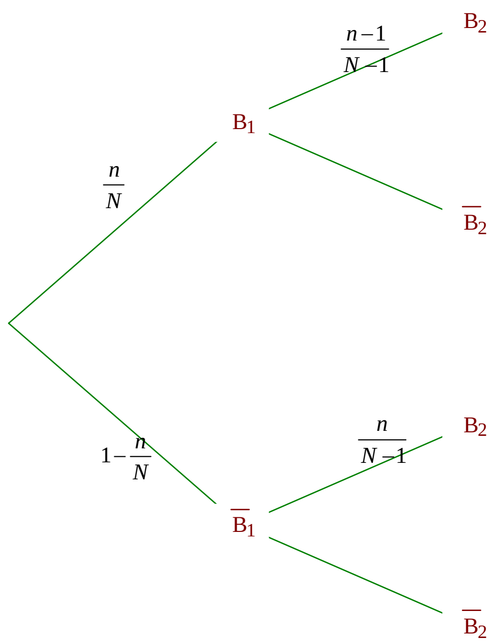
24 $p_n\geqslant 0{,}9$ pour $n=13$

On rentre la fonction correspondante sur la calculatrice.
Pour $n=1$, $n=2$, $n=3$, on voit 0 dans le tableau de valeurs.

25 Pour tout entier naturel i compris au sens large entre 1 et 2n, on note R_i l'événement tiré une boule rouge et V_i l'événement tiré une boule verte.

On cherche $P\left(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{V}_2\cap\mathrm{R}_3\cap\mathrm{V}_4\cap...\cap\mathrm{R}_{2n-1}\cap\mathrm{V}_{2n}\right)+P\left(\mathrm{V}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\mathrm{V}_3\cap\mathrm{R}_4\cap...\cap\mathrm{V}_{2n-1}\cap\mathrm{R}_{2n}\right)$.

28 Exercice prévu pour le contrôle du 14-1-2016 en Terminale
1°) On dresse un arbre de probabilités.



On sait que B_1 et $\overline{B_1}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_2)=P(B_1\cap B_2)+P(\overline{B_1}\cap B_2)$$

$$=P(B_1)\times P(B_2/B_1)+P(\overline{B_1})\times P(B_2/\overline{B_1})$$

$$=\frac{n}{N}\times\frac{n-1}{N-1}+\left(1-\frac{n}{N}\right)\times\frac{n}{N-1}$$

$$=\frac{n(n-1)+(N-n)n}{N(N-1)}$$

$$=\frac{Nn-n}{N(N-1)}$$

$$=\frac{n\cancel{(N-1)}}{N\cancel{(N-1)}}$$

$$=\frac{n}{N}$$

On constate que $P(B_2)=P(B_1)$, résultat un peu surprenant mais qui résulte du calcul effectué.

2°)

Les valeurs possibles de X sont $x_1=1$ et $x_2=2$.

$$P(X=1)=P(B_1\cap B_2)+P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})$$

$$=\frac{n}{N}\times\frac{n-1}{N-1}+\left(1-\frac{n}{N}\right)\times\left(1-\frac{n}{N-1}\right)$$

$$=\frac{n(n-1)+(N-n)(N-1-n)}{N(N-1)}$$

$$=\frac{n^2-n+\left[N^2-(1+n)N-nN+n(n+1)\right]}{N(N-1)}$$

$$=\frac{n^2-n+\left[N^2-(1+2n)N+n(n+1)\right]}{N(N-1)}$$

$$=\frac{n^2-n+N^2-(1+2n)N+n(n+1)}{N(N-1)}$$

$$=\frac{2n^2+N^2-(1+2n)N}{N(N-1)}$$

$$P(X=2)=1-P(X=1)$$

$$E(X)=1\times P(X=1)+2\times P(X=2)$$
$$E(X)=1\times P(X=1)+2\times(1-P(X=1))$$
$$E(X)=2-P(X=1)$$
$$E(X)=2-\frac{2n^2+N^2-(1+2n)N}{N(N-1)}$$
$$E(X)=\frac{2N(N-1)-\left[2n^2+N^2-(1+2n)N\right]}{N(N-1)}$$
$$E(X)=\frac{2N^2-2N-2n^2-N^2+(1+2n)N}{N(N-1)}$$
$$E(X)=\frac{N^2-2N-2n^2+(1+2n)N}{N(N-1)}$$
$$E(X)=\frac{N^2-N+2nN-2n^2}{N(N-1)}$$
$$E(X)=\frac{N^2+(2n-1)N-2n^2}{N(N-1)}$$

$$\Delta=(2n-1)^2+8n^2$$

$$\Delta=12n^2-4n+1$$

On prend $n=7$. Déterminer N tel que le jeu soit équitable.

2°) Exprimer en fonction de n et de N la probabilité que la première boule tirée soit blanche sachant que la deuxième boule tirée est blanche.

29 La probabilité d'obtenir une somme strictement supérieure à 5 sachant que les deux numéros obtenus sont différents est égale à $\frac{11}{15}$.

34 Au tennis, le joueur qui « est au service » joue une première balle.

1°) 0,662
2°) 0,483

35 1°) La matrice de transition en colonnes est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0,75 & 0 \\ 0,75 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$.

2°) $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}$