TS Exercices sur les fonctions puissances et racines n-ièmes

1 Calculer sans utiliser la calculatrice en détaillant les étapes de calcul.

$A=\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}$; $B=5^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[6]{25}$; $C=\sqrt[5]{81}\times 3^{\frac{1}{5}}$.

2 1°) Développer $\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$.

2°) En déduire la valeur exacte de $A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

3 Soit a un réel strictement positif. Simplifier $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\times\left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2\times\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}}$.

4 Calculer $A=\dfrac{27^{-\frac{2}{3}}\times 49^{\frac{1}{2}}\times 16^{\frac{5}{4}}}{\left(\sqrt[5]{243}\right)^2}$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt[3]{5-2x}=2$.

On commencera par préciser le domaine de résolution de l'équation.

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-2=0$.

On commencera par préciser le domaine de résolution de l'équation.

7 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+x^2}$; justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

8 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{2}{3}}\ln x$; justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

9 On considère la fonction $f : x \mapsto (2-x)^{-\frac{5}{3}}$.

1°) Donner l'ensemble de définition de f.

2°) Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

3°) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

4°) Dresser le tableau de variation de f.

10 On considère la fonction $f : x \mapsto x^3-6\ln x+1$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Donner l'ensemble de définition de f.

2°) Étudier la limite de f en 0 à droite. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

3°) Étudier la limite de f en $+\infty$.

4°) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f ; on détaillera le signe de $f'(x)$.

Calculer l'extremum de f (valeur exacte).

5°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. En déduire que $\mathcal{C}$ présente une branche parabolique en $+\infty$ dont on précisera la direction.

6°) Faire un petit tableau de valeurs et tracer $\mathcal{C}$ en prenant 1 cm pour unité graphique.

Tracer la tangente horizontale ainsi que la tangente T au point A d'abscisse 1.

Bien mettre les pointillés en abscisse et en ordonnées **avec les valeurs exactes** au point correspondant à l'extremum.

11 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto x\times 2^x$. Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

12 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto x^2\times 3^{-x}$. Déterminer sa limite en $+\infty$.

13 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}$.

Corrigé

$\boxed{1}$ (On passe aux exposants fractionnaires pour certains des calculs) $A=5$; $B=5$; $C=3$.

Solution détaillée :

$$A=\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}=\sqrt[4]{5\times125}=\sqrt[4]{5\times5^3}=\sqrt[4]{5^4}=5$$

Autre version :

$$\begin{aligned}A&=\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}\\&=5^{\frac{1}{4}}\times125^{\frac{1}{4}}\\&=5^{\frac{1}{4}}\times\left(5^3\right)^{\frac{1}{4}}\\&=5^{\frac{1}{4}}\times5^{\frac{3}{4}}\\&=5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=5^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[6]{25}\\&=5^{\frac{2}{3}}\times25^{\frac{1}{6}}\\&=5^{\frac{2}{3}}\times\left(5^2\right)^{\frac{1}{6}}\\&=5^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{1}{3}}\\&=5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C&=\sqrt[5]{81}\times3^{\frac{1}{5}}\\&=81^{\frac{1}{5}}\times3^{\frac{1}{5}}\\&=\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\times3^{\frac{1}{5}}\\&=3^{\frac{4}{5}}\times3^{\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 1°) $\left(2+\sqrt{2}\right)^3=20+14\sqrt{2}$; $\left(2-\sqrt{2}\right)^3=20-14\sqrt{2}$

On rappelle que pour tout couple $(a\,;b)$ de réels on a : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (identités cubiques à connaître).

2°) $A=2\sqrt{2}$

Solution détaillée :

1°) **Développons $\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$.**

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{2}\right)^3&=2^3+3\times2^2\times\sqrt{2}+3\times2\times\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3\\&=8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}\\&=20+14\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(2-\sqrt{2}\right)^3&=2^3-3\times2^2\times\sqrt{2}+3\times2\times\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^3\\&=8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}\\&=20-14\sqrt{2}\end{aligned}$$

2°) **Déduisons-en la valeur exacte de $A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.**

$$\begin{aligned}A&=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\\&=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}-\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}\\&=\left(2+\sqrt{2}\right)-\left(2-\sqrt{2}\right)\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $A=\sqrt[6]{a}$

Solution détaillée :

$$A=\frac{\sqrt[3]{a^5}\times\left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2\times\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}}=\frac{a^{\frac{5}{3}}\times\left(a^{\frac{7}{4}}\right)^2}{a^4\times a^{\frac{2}{5}}\times a^{\frac{3}{5}}}=\frac{a^{\frac{5}{3}}\times a^{\frac{7}{2}}}{a^4\times a^{\frac{5}{5}}}=\frac{a^{\frac{31}{6}}}{a^5}=a^{\frac{31}{6}-5}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$$

$\boxed{4}$ $A=\dfrac{224}{81}$

Solution détaillée :

$$\begin{aligned}A&=\frac{27^{-\frac{2}{3}}\times49^{\frac{1}{2}}\times16^{\frac{5}{4}}}{\left(\sqrt[5]{243}\right)^2}\\&=\frac{\left(3^3\right)^{-\frac{2}{3}}\times\left(7^2\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(2^4\right)^{\frac{5}{4}}}{\left(\sqrt[5]{3^5}\right)^2}\\&=\frac{3^{-2}\times7\times2^5}{3^2}\\&=\frac{7\times32}{3^4}\\&=\frac{224}{81}\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ On résout dans l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right]$; $x=-\frac{3}{2}$.

Idée pour la résolution : on élève au cube les deux membres : $\left(\sqrt[3]{5-2x}\right)^3=2^3$.

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt[3]{5-2x}=2$ (1).

On commence par préciser le domaine de résolution de l'équation.

On doit avoir $5-2x\leqslant 0$ soit $x\leqslant\frac{5}{2}$.

On résout l'inéquation dans $\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right]$.

(1) $\Leftrightarrow 5-2x=2^3$

$\Leftrightarrow 5-2x=8$

$\Leftrightarrow 2x=-3$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}\in\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right]$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$\boxed{6}$ On résout l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$ (en effet $x^{\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln x}$; la présence du logarithme népérien impose $x>0$) ; on pose $X=x^{\frac{1}{3}}$.

$X=2$ ou $X=-1$

$x=8$

Remarque : on obtient $x^{\frac{1}{3}}=-1$ soit $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln x}=-1$ ce qui est impossible car le résultat d'une exponentielle est toujours strictement positive.

L'écriture $x^{\frac{1}{3}}$ suppose que $x>0$.

Dans ce cas, on a : $x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$.

On a défini cette année uniquement la racine cubique d'un réel positif ou nul.

Ainsi, on ne peut écrire $\sqrt[3]{-1}$.

Ainsi l'équation $x^{\frac{1}{3}}=-1$ (qui est équivalent dans $\mathbb{R}_+^*$ à $\sqrt[3]{x}=-1$) n'a aucune solution.

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-2=0$ (1).

$x^{\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln x}$ et $x^{\frac{2}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln x}$ donc on doit avoir $x>0$.

Donc on résout l'inéquation dans $]0\,;+\infty[$.

On pose $X=x^{\frac{1}{3}}$ (changement d'inconnue).

L'équation (1) s'écrit : $X^2-X-2=0$ (1′).

(1′) $\Leftrightarrow X=2$ ou $X=-1$ *(On a procédé par racines évidentes)*

Or $X=x^{\frac{1}{3}}$.

Donc

(1′) $\Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}}=2$ ou $x^{\frac{1}{3}}=-1$ (impossible)

$\Leftrightarrow x=8$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=\{8\}$

$\boxed{7}$ ***f* : $x\mapsto\sqrt[3]{1+x^2}$**

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{2x\left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}}}{3}$

Solution détaillée :

On commence par cherche l'ensemble de définition de *f*.

$f(x)$ existe si et seulement si $1+x^2\geqslant 0$ (toujours vrai)

Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{3} \times 2x \times \left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}}$

$$= \frac{2x\left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}}}{3}$$

On applique la formule $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$.

Solution plus compliquée :

On écrit : $f(x) = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1+x^2\right)}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{2x}{1+x^2} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1+x^2\right)}$

$$= \frac{2x}{3\left(1+x^2\right)} \times \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2x\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}}{3\left(1+x^2\right)}$$

$$= \frac{2x\left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}}}{3}$$

Cette année, on a défini la racine cubique d'un nombre réel positif ou nul.
Nous verrons plus tard que l'on peut définir la racine cubique d'un réel quelconque (de sorte que l'on peut par exemple écrire $\sqrt[3]{-27} = -3$).

$\boxed{8}$ $\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[\ ;\ f'(x) = \frac{2\ln x + 3}{3\sqrt[3]{x}}$

Solution détaillée :

***f* : $x \mapsto x^{\frac{2}{3}} \ln x$**

• **Déterminons l'ensemble de définition de *f*.**

$f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

• **Justifions que *f* est dérivable sur son ensemble de définition.**

f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

• **Calculons $f'(x)$**

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{2}{3} \times x^{-\frac{1}{3}} \ln x + x^{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{x}$

$$= \frac{2}{3} \times x^{-\frac{1}{3}} \ln x + x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} \left(2\ln x + 3\right)$$

$$= \frac{2\ln x + 3}{3\sqrt[3]{x}}$$

$\boxed{9}$

2°) Pour les limites, on écrit : $\left(2-x\right)^{-\frac{5}{3}} = \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}\ln(2-x)}$. On utilise un changement de variable.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

On peut aussi écrire $\left(2-x\right)^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\left(2-x\right)^{\frac{5}{3}}}$.

Solution détaillée :

***f* : $x \mapsto \left(2-x\right)^{-\frac{5}{3}}$**

1°) **Ensemble de définition de *f***

$f(x)$ existe si et seulement si $2-x > 0$
si et seulement si $x < 2$

$\mathcal{D}_f =]-\infty\,;2[$

2°) **Dérivabilité et dérivée de *f***

f est dérivable sur $]-\infty\,;2[$ (règle sur les composées de fonctions dérivables).

$\forall x \in]-\infty\,;2[\quad f'(x) = \frac{5}{3\left(2-x\right)^{\frac{8}{3}}}$

3°) **Limites aux bornes de l'ensemble de définition**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \big(\underbrace{2-x}_{X}\big) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} X^{-\frac{5}{3}} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 2^-}\Big(\underbrace{2-x}_{X}\Big)=0^+\\&\lim_{X\to 0^+} X^{-\frac{5}{3}}=+\infty\end{aligned}\right\}$$ donc par limite d'une composée $\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$.

4°) **Variations de *f***

x	$-\infty$		2
Signe de $f'(x)$		$+$	‖
Variations de f	0	↗	$+\infty$ ‖

f est strictement croissante sur $]-\infty\,;2[$.

Dans le tableau de variation, ne pas oublier de mettre une double barre sous le 2 au niveau de $f'(x)$ et de *f*.

Compléter le tableau avec les limites.

Remarque :

L'observation sur la calculatrice graphique de la représentation graphique de la courbe de la fonction *f* donne une courbe en deux morceaux, sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$ et sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

La partie sur $]2\,;+\infty[$ ne nous intéresse pas ; elle provient du fait que la calculatrice accepte de définir la racine cubique d'un nombre négatif ce que nous n'avons pas fait cette année (mais cela est souvent fait dans les classes supérieures).

$\boxed{10}$ **$f : x \mapsto x^3-6\ln x+1$**

1°) **Déterminons l'ensemble de définition de *f*.**

$f(x)$ existe si et seulement si $x>0$.

Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}_+^*$.

2°) **Étudions la limite de *f* en 0^+.**

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+} x^3=0\\&\lim_{x\to 0^+}(-6\ln x)=+\infty\\&\lim_{x\to 0^+} 1=1\end{aligned}\right\}$$ donc par limite d'une somme, on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet donc l'axe des ordonnées (O*y*) pour asymptote verticale.

(ou : la droite (O*y*) est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$).

3°) **Étudions la limite de *f* en $+\infty$.**

En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $+\infty-\infty$ ».

On effectue une réécriture :

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)=x^3\left(1-6\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}\right)$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty\\&\lim_{x\to+\infty}\left(1-6\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)=1\end{aligned}\right\}$$ donc par limite d'un produit, on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

4°)

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f'(x)&=3x^2-\frac{6}{x}\\&=\frac{3x^3-6}{x}\\&=\frac{3(x^3-2)}{x}\end{aligned}$$

• Étudions les variations de *f*.

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de x^3-2.

Pour connaître le signe de x^3-2, on résout deux inéquations et une équation : $x^3-2>0$, $x^3-2<0$ et $x^3-2=0$.

$x^3-2>0$	$x^3-2<0$	$x^3-2=0$
$x^3>2$ $x>\sqrt[3]{2}$	$x^3<2$ $x<\sqrt[3]{2}$	$x^3=2$ $x=\sqrt[3]{2}$

Dans le tableau de variation, ne pas oublier de mettre une double barre sous le 0 au niveau de $f'(x)$ et de $f(x)$.

Compléter le tableau avec les limites.

x	0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
Signe de x^3-2		$-$	0	$+$	
Signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	$3-2\ln 2$	↗	$+\infty$

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;\sqrt[3]{2}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[$.

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt[3]{2}\right) &= \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 6\ln\left(\sqrt[3]{2}\right)+1 \\ &= 2+1-2\ln 2 \\ &= 3-2\ln 2 \end{aligned}$$

5°)

• Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Attention : on écrit $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^3-6\ln x+1}{x}=x^2-6\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}$ pour $x>0$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ &\lim_{x\to+\infty}\left(-6\frac{\ln x}{x}\right)=0 \\ &\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \end{aligned}\right\}\text{ donc par limite d'une somme } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

• Déduisons-en que $\mathcal{C}$ présente une branche parabolique en $+\infty$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ présente une branche parabolique en $+\infty$ de direction Oy.

N.B. : Pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, on ne peut pas utiliser la règle des monômes de plus haut degré car, à cause de ln x, le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ ne correspond pas à l'expression d'une fonction rationnelle.

6°) **Tracé de la courbe $\mathcal{C}$ et de deux tangentes**

$\sqrt[3]{2}=1{,}2599210...$

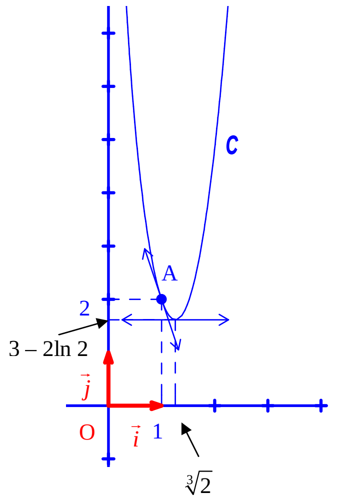
$f\left(\sqrt[3]{2}\right)=1{,}613705639...$

$\mathrm{A}(1\,;2)$

$f(1)=2$

$f'(1)=-3$

La tangente T à $\mathcal{C}$ en A a pour équation $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ soit $y=-3x+5$.



$\boxed{11}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$; $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2^x(1+x\ln 2)$.

Solution détaillée :

Méthode : On écrit $f(x)=x\times \mathrm{e}^{x\ln 2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x) &= \mathrm{e}^{x\ln 2}+x\times\ln 2\times \mathrm{e}^{x\ln 2} \\ &= \mathrm{e}^{x\ln 2}(1+x\ln 2) \end{aligned}$$

Erreur : calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto 2^x$ en utilisant la formule de la dérivée des fonctions $x\mapsto x^n$.
On obtient alors $x\times 2^{x-1}$ qui est un résultat complètement faux.

$\boxed{12}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (méthode : changement de variable ; on pose $X = x\ln 3$, on obtient $f(x) = \dfrac{1}{(\ln 3)^2} \times \dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X^2}}$)

Solution détaillée :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{x^2}{3^x}$

$= \dfrac{x^2}{e^{x\ln 3}}$ (car selon la formule de puissance d'exposant réel : $3^x = e^{x\ln 3}$)

On pose $X = x\ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{X}{\ln 3}$.

$x \to +\infty \Leftrightarrow X \to +\infty$

$$f(x) = \frac{\left(\dfrac{X}{\ln 3}\right)^2}{e^X} = \left(\frac{X}{\ln 3}\right)^2 \times \frac{1}{e^X} = \frac{1}{(\ln 3)^2} \times \frac{X^2}{e^X} = \frac{1}{(\ln 3)^2} \times \frac{1}{\dfrac{e^X}{X^2}}$$

$(\ln 3)^2$ est une constante (attention : $(\ln 3)^2 \neq 2\ln 3$)

$\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X^2} = +\infty$ (limite de référence ; croissance comparée) d'où $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X^2}} = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\boxed{13}$ Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$