TS spé Les nombres de Mersenne

Objectif : découvrir les nombres de Mersenne

Marin Mersenne est un religieux français du XVII^e^ siècle. Il se passionna pour les sciences de son temps et joua un rôle important dans la diffusion des connaissances scientifiques à l'époque. Il entretient de nombreuses correspondances. En particulier, il a tenté de dresser la liste des nombres premiers de la forme 2^n-1.

On se propose d'étudier les nombres $\mathrm{M}_n=2^n-1$ avec *n* entier naturel non nul.

1°) **Expérimentation**

On donne le tableau suivant obtenu à l'aide d'un tableur.

n	M_n	*n* premier ?	M_n premier ?
1	1	Faux	Faux
2	3	Vrai	Vrai
3	7	Vrai	Vrai
4	15	Faux	Faux
5	31	Vrai	Vrai
6	63	Faux	Faux
7	127	Vrai	Vrai
8	255	Faux	Faux
9	511	Faux	Faux
10	1023	Faux	Faux
11	2047	Vrai	Faux

Voici les conjectures de **deux élèves :**

• Charles conjecture que « M_n premier si et seulement si *n* premier ». C'est une condition nécessaire et suffisante.

• Louis conjecture que « Si M_n est premier, alors *n* est premier ». La condition est nécessaire mais, selon Louis, elle n'est pas suffisante.
Au vu du tableau, quelle conjecture peut-on invalider ?

2°) **Justification**

a) Soit d et k deux nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

Démontrer que $2^{dk}-1=\left(2^d-1\right)\left(1+2^d+\left(2^d\right)^2+\ldots+\left(2^d\right)^{k-1}\right)$.

b) En déduire que « Si d divise n, alors M_n est divisible par 2^d-1 ».

c) Justifier la conjecture de Louis.

3°) **Notes historiques et évolution de la recherche**

a) Dans le prologue de son œuvre *Cogitata physica-mathematica* (1644), Mersenne affirme que le nombre 2^n-1 est premier uniquement si la valeur de n appartient à l'ensemble
{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 13 ; 17 ; 18 ; 31 ; 67 ; 127 ; 257}.
On ne sait pas comment Mersenne a pratiqué pour tester la primalité de ces nombres avec les procédés de l'époque.

Vérifier si cette liste est exacte ou incomplète (utiliser Xcas ou effectuer une recherche sur Internet).

Information : Les nombres de Mersenne (pas nécessairement premiers, mais candidats à l'être) sont les nombres de la forme 2^n-1 avec n nombre premier.

b) En juin 2012, 47 nombres de Mersenne étaient connus, le plus grand étant $2^{43112609}-1$. Retrouver sur Internet une chronologie des découvertes des nombres de Mersenne, ainsi que les découvreurs.

Solution

1°) La conjecture de Charles peut être invalidée.

2°)

a) $\boldsymbol{d \in \mathbb{N}, d \geqslant 2 \,;\, k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2}$

Démontrons que $\boldsymbol{2^{dk}-1=\left(2^d-1\right)\left(1+2^d+\left(2^d\right)^2+\ldots+\left(2^d\right)^{k-1}\right)}$**.**

On a : $2^{dk}-1=\left(2^d\right)^k-1^k$.

On utilise la formule fondamentale de l'algèbre : $a^n-b^n=\left(a-b\right)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$.

On l'applique à $a=2^d$ et $b=1$.

On obtient : $2^{dk}-1=\left(2^d-1\right)\left(\left(2^d\right)^{k-1}+\left(2^d\right)^{k-2}+\ldots+2^d+1\right)$ ou $2^{dk}-1=\left(2^d-1\right)\left(1+2^d+\left(2^d\right)^2+\ldots+\left(2^d\right)^{k-1}\right)$.

On pourrait aussi écrire : $2^{dk}-1=\left(2^d-1\right)\left(1+2^d+2^{2d}+\ldots+2^{(k-1)d}\right)$.

On peut aussi utiliser la formule donnant la somme des puissances consécutives d'un réel différent de 1.

b) **Déduisons-en que « Si *d* divise *n*, alors M_n est divisible par 2^d-1 ».**

On suppose que d est un entier naturel tel que $d \mid n$.
Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $dk=n$.
Or d'après la question précédente, $\mathrm{M}_n=\left(2^d-1\right)\left(2^{d(k-1)}+2^{d(k-2)}+\ldots+2^d+1\right)$.
Donc $2^d-1 \mid \mathrm{M}_n$.

c) **Justifions la conjecture de Louis.**

Si n n'est pas premier, alors n admet un diviseur positif d autre que 1 et que lui-même.
D'après la question précédente, $2^d-1 \mid \mathrm{M}_n$
2^d-1 est un diviseur de M_n autre que 1 et que lui-même.
Donc M_n n'est pas premier.
On a : (n n'est pas premier) $\Rightarrow$ (M_n n'est pas premier).
Don par contraposition : (M_n est premier) $\Rightarrow$ (n n'est pas premier). .

GIMPS

Fondé en 1996 par l'Américain George Woltman, le Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) est un projet de calcul partagé où les volontaires installent sur leur propre ordinateur un logiciel client pour traiter une partie des calculs permettant de chercher les nombres premiers de Mersenne.
Le Norvégien Odd Magnar Strindmo a ainsi mis à disposition, pendant 29 jours, son processeur Intel Core2.
C'est ainsi que le 46^{e} nombre premier de Mersenne a été trouvé en avril 2009. Il s'agit de $2^{42643801}-1$, le deuxième plus grand nombre premier connu.
En effet, le 47^{e} nombre premier de Mersenne a été identifié un an plus tôt : $2^{43112609}-1$. Ceci est la preuve que certains nombres de Mersenne ont peut-être été oubliés et que ce classement peut encore bouger.
Le GIMPS a trouvé 13 nombres premiers de Mersenne en 13 ans. Pour connaître l'état actuel des travaux, on peut se rendre sur le site officiel http://www.mersenne.org/ et pourquoi pas, participer !

Le test de Lucas-Lehmer

En mathématiques, le test de Lucas-Lehmer est un test de primalité pour les nombres de Mersenne. Le test fut originellement développé par Édouard Lucas en 1878 et amélioré de façon notable par Derrick Henry Lehmer dans les années 1930.

François Édouard Anatole Lucas (4 avril 1842-3 octobre 1891) est un mathématicien français.

Derrick Henry Lehmer (23 février 1905-22 mai 1991) est un mathématicien américain, inventeur d'un test de primalité.

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = (u_n)^2 - 2$.

On ne cherchera pas l'expression de u_n en fonction de n (en fait, il n'est pas possible d'exprimer u_n en fonction de n).

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0$ modulo M_n. Cette propriété est admise dans la suite (la démonstration dépasse le cadre de la terminale).

● Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier.

$\mathrm{M}_5 = 2^5 - 1 = 31$

$u_1 = 14$
$u_2 = 194$
$u_3 = 37\ 634$

On a : $37\ 634 = 31 \times 1214$

Le test « marche ».

● Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Écrire un algorithme qui permette de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables : u, M, n et i sont des entiers naturels

Initialisation :
u prend la valeur 4

Traitement :
Saisir un entier naturel n
M prend la valeur $2^n - 1$
Pour i allant de 1 à $n-2$ **Faire**
    u prend la valeur $u^2 - 2$
FinPour

Sortie :
Si M divise u alors afficher « M indice n est premier »
  sinon afficher « M indice n n'est pas premier »
FinSi

J’ai commencé ce thème le lundi 3 mars 2014 (jour de rentrée après les vacances de février).

Ce thème s’inscrit dans la « quête de nombres premiers ».

Ce thème a été abordé très superficiellement en exercice.

Pour que M_n soit premier, il faut que *n* soit premier.
La réciproque est fausse.

Donatien Lenoir et Thomas Delamarre se sont lancés.

Il se sont intéressés à $2^{23}-1$. « Il y a une régularité ? »

Le 6-3-2014

J’ai découvert un site intéressant « Science étonnante ». Les nombres de Mersenne.
L’auteur évoque la constante de Mils et relate la conférence mémorable d’un mathématicien au début du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle pour démontrer que M_{67} n’est pas premier.

Livre Odyssée TS

GIMPS : vous pouvez y participer !

Fondé en 1996 par l’Américain George Woltman, le Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) est un projet de calcul partagé où les volontaires installent sur leur propre ordinateur un logiciel client pour traiter une partie des calculs permettant de chercher les nombres premiers de Mersenne.
Le Norvégien Odd Magnar Strindmo a ainsi mis à disposition, pendant 29 jours, son processeur Intel Core2. C’est ainsi que le 46$^{\mathrm{e}}$ nombre premier de Mersenne a été trouvé en avril 2009. Il s’agit de $2^{42643801}-1$, le deuxième plus grand nombre premier connu.
En effet, le 47$^{\mathrm{e}}$ nombre premier de Mersenne a été identifié un an plus tôt : $2^{43112609}-1$. Ceci est la preuve que certains nombres de Mersenne ont peut-être été oubliés et que ce classement peut encore bouger.
Le GIMPS a trouvé 13 nombres premiers de Mersenne en 13 ans. Pour connaître l’état actuel des travaux, on peut se rendre sur le site officiel http://www.mersenne.org/ et pourquoi pas, participer !

Extrait du livre Odyssée TS spécialité page 75

Marin Mersenne (1588-1648)

Religieux français, il est aussi mathématicien et philosophe ; il correspondait avec Fermat et Descartes ou encore avec Blaise Pascal.
Son apport aux sciences physiques fut également important, notamment par son travail sur les ondes et la propagation du son. Par ailleurs, il dessina le premier les plans d’un sous-marin (prénom prédestiné ?).

Extrait du livre Odyssée page 75
Les nombres de Mersenne sont de la forme $\mathrm{M}_p = 2^p - 1$, avec *p* un nombre premier.

Ces nombres étudiés dès l'Antiquité, ont pris le nom de Mersenne quand ce dernier fournit une liste de ceux d'entre eux qui sont premiers jusqu'à $p = 257$. Bien que cette liste fût fausse, Mersenne savait que tous les nombres M_p n'étaient pas premiers.

Le test de Lucas-Lehmer vient du sujet de bac S Asie 19 juin 2014.
Je l'ai fait ce jour où j'ai présenté les nombres de Mersenne en TS ; c'était le 3-2-2015.

J'ai enlevé cela le 16-3-2016 :

Livre Hyperbole TS spé il y a d'autres questions en plus en tête du document