**1ère S**

# Équations et inéquations trigonométriques avec des cosinus et des sinus (2)

**Objectifs du chapitre :**

- étudier la résolution d'équations trigonométriques dans $\mathbb{R}$ (et non plus dans un intervalle borné comme on l'a déjà vu)

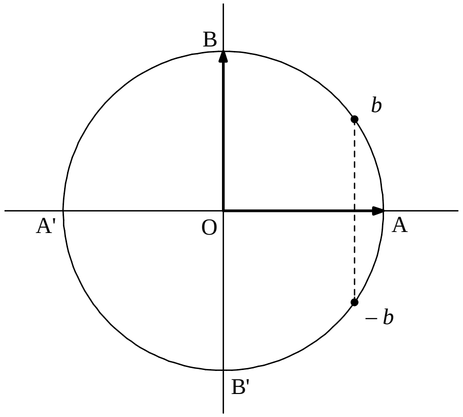
- étudier la résolution d'inéquations trigonométriques nécessitant un changement d'inconnue

**Plan du chapitre :**

# I. Règles fondamentales

## 1°) Égalité de deux cosinus

$a$ et $b$ sont deux réels.




$$\cos a = \cos b \text{ si et seulement si } \begin{cases} a = b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

**Justification :**

On note M et N les points images respectifs de $a$ et $b$ sur le cercle trigonométrique.

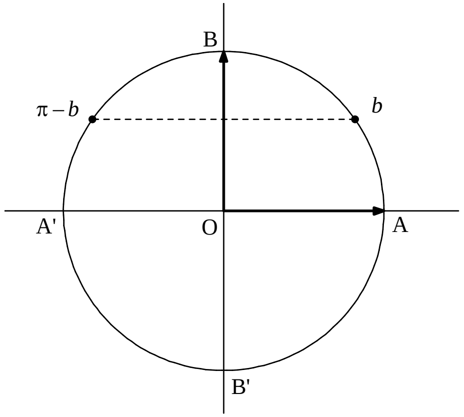
$\cos a = \cos b$ si et seulement si M et N ont la même abscisse

si et seulement si M et N sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe des abscisses



## 2°) Égalité de deux sinus

$a$ et $b$ sont deux réels.




$$\sin a = \sin b \text{ si et seulement si } \begin{cases} a = b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

**Justification :**

On note M et N les points images respectifs de $a$ et $b$ sur le cercle trigonométrique.

$\sin a = \sin b$ si et seulement si M et N ont la même ordonnée

si et seulement si M et N sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

## II. Exemples de résolutions d'équations trigonométriques

### 1°) Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ $\quad(1)$.

**Astuce de départ :** $\dfrac{1}{2}$ est le cosinus de $\dfrac{\pi}{3}$ ($\dfrac{1}{2}$ est une valeur remarquable du cosinus).

$\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

**Réécriture de l'équation :**

$(1)$ s'écrit $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$(1) \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$ (« on équilibre l'équation »)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

(on « enlève » les cos avec la règle 1)

On écrit une seule équivalence devant un trait ondulé (pas une équivalence devant chaque égalité).

Il y a deux « familles » de solutions.

Soit $S_1$ l'ensemble des solutions de $(1)$.

$$\boxed{S_1 = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}}$$

**Remarque :**

On peut aussi écrire : $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Il n'y a pas d'ordre dans une union.



### 2°) Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\underbrace{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)}_{\text{ne pas développer}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad(2)$.

**Astuce de départ :**

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$

**Réécriture de l'équation :**

$(2)$ s'écrit $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$(2) \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit $S_2$ l'ensemble des solutions de $(2)$.

$$\boxed{S_2 = \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{12} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}}$$

### 3°) Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x = \sin x \quad (3)$.

**Astuce de départ :**

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (formule de trigonométrie)

**Réécriture de l'équation :**

$(3)$ s'écrit $\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$(3) \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

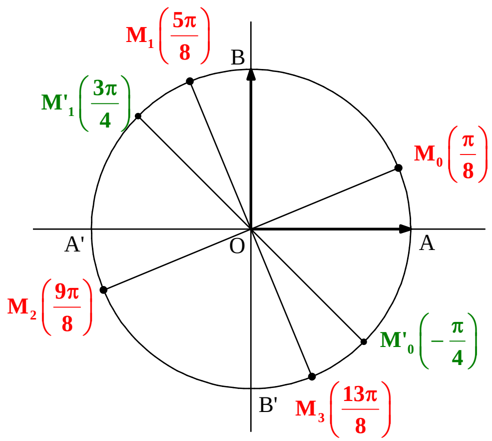
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-\frac{\pi}{2} + 2k'\pi}{2} \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

Soit $S_3$ l'ensemble des solutions de $(3)$.

$$\boxed{S_3 = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}}$$






| $1^{\text{ère}}$ famille (points rouges) | $2^{\text{e}}$ famille (points verts) |
|---|---|
| $k = 0 : \frac{\pi}{8}$ | $k' = 0 : -\frac{\pi}{4}$ |
| $k = 1 : \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$ | $k' = 1 : -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ |
| $k = 2 : \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$ | |
| $k = 3 : \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{8}$ | |

## III. Équations trigonométriques particulières

### 1°) Règles

Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient dans chaque cas une seule famille de solutions.

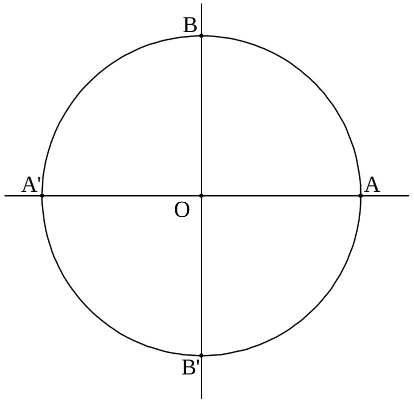
$$\boxed{\begin{array}{l} \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array}}$$

## 2°) Justification

**Donner 6 cercles trigonométriques.**

### ● Équation $\cos x = 1$

Les solutions ont pour point image A.




Les solutions sont les nombres 0, 2π, 4π, – 2π, – 4π ...

Il s'agit des nombres de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Une autre méthode consiste à appliquer la propriété énoncée au début du cours.

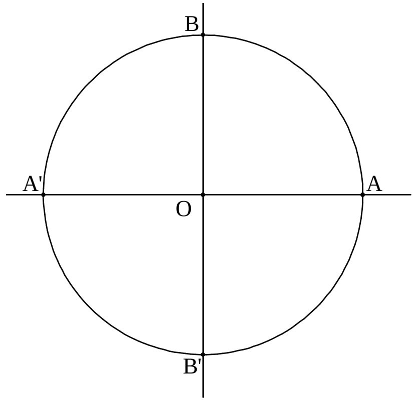
$$\cos x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -0 + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Les deux égalités correspondent en fait à une seule égalité $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



### ● Équation $\cos x = -1$

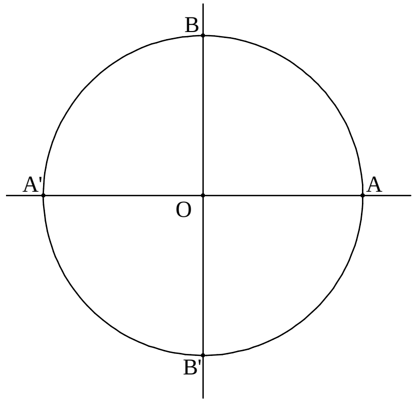
Les solutions ont pour point image A'.




Les solutions sont les nombres π, 3π, – π, – 3π ...
Il s'agit des nombres de la forme $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

### ● Équation $\cos x = 0$

Les solutions ont pour points images B et B'.




Les solutions sont les nombres $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$ ...

Il s'agit des réels de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On peut aussi dire qu'il s'agit des réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

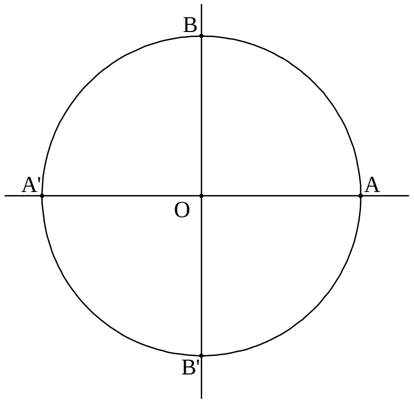
Une autre méthode consiste à appliquer la propriété énoncée au début du cours.

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Les deux égalités correspondent en fait à une seule égalité $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**● Équation $\sin x = 1$**

Les solutions ont pour point image B.

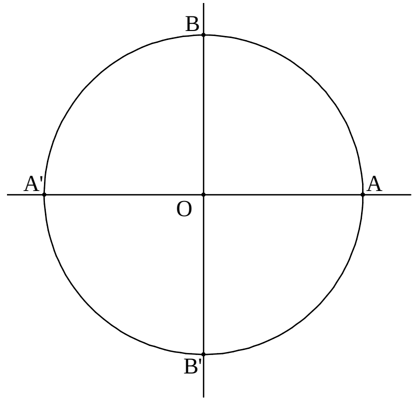



Les solutions sont les nombres $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi$, $\dfrac{\pi}{2} + 4\pi$, $\dfrac{\pi}{2} - 2\pi$, $\dfrac{\pi}{2} - 4\pi$ ...

Il s'agit des nombres de la forme $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**● Équation $\sin x = -1$**

Les solutions ont pour point image $B'$.

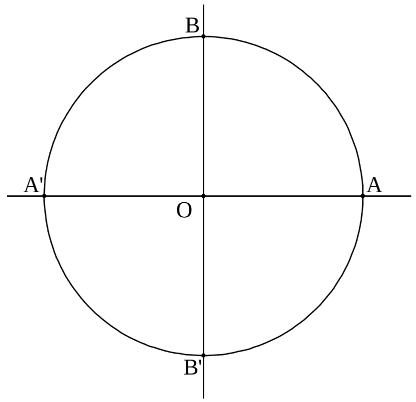



Les solutions sont les nombres $-\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} + 4\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} - 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} - 4\pi$ ...

Il s'agit des nombres de la forme $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**● Équation $\sin x = 0$**

Les solutions ont pour points images A et $A'$.




Les solutions sont les nombres 0, $\pi$, $2\pi$, $3\pi$, $4\pi$, $-\pi$, $-2\pi$, $-3\pi$, $-4\pi$ ...
Il s'agit des nombres de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

## IV. Résolution d'une équation trigonométrique dans un intervalle donné (exemple)

Résoudre dans $[0\,;4\pi]$ l'équation $\cos 2x=\frac{1}{2}$ $(1)$.

**1<sup></sup>**

**1ère étape :**

On résout l'équation dans $\mathbb{R}$.

**Astuce de départ :**

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$(1)\Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x=-\frac{\pi}{3}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{6}+k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$



**2e étape :**

On cherche les solutions dans $[0\,;4\pi]$.

**1ère famille :** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

On cherche $k\in\mathbb{Z}$ tel que :

$0\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant 4\pi$ $\quad :\pi\ (\pi>0)$

$0\leqslant\frac{1}{6}+k\leqslant 4$ $\quad +\left(-\frac{1}{6}\right)$

$-\frac{1}{6}\leqslant k\leqslant\frac{23}{6}$

$-\frac{1}{6}=-0{,}166...$

$\frac{23}{6}=3{,}833...$

$k\in\mathbb{Z}$

Donc

$$\begin{cases} k=0 \\ \text{ou} \\ k=1 \\ \text{ou} \\ k=2 \\ \text{ou} \\ k=3 \end{cases}$$

**2e famille :** $x=-\frac{\pi}{6}+k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z})$

On cherche $k'\in\mathbb{Z}$ tel que :

$0\leqslant-\frac{\pi}{6}+k'\pi\leqslant 4\pi$ $\quad :\pi\ (\pi>0)$

$0\leqslant-\frac{1}{6}+k'\leqslant 4$ $\quad +\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}\leqslant k'\leqslant\frac{25}{6}$

$\frac{1}{6}=0{,}166...$

$\frac{25}{6}=4{,}1666...$

$k'\in\mathbb{Z}$

Donc

$$\begin{cases} k'=1 \\ \text{ou} \\ k'=2 \\ \text{ou} \\ k'=3 \\ \text{ou} \\ k'=4 \end{cases}$$

**1ère famille :**

Pour $k=0$, $x=\frac{\pi}{6}+0\pi=\frac{\pi}{6}$

Pour $k=1$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$

Pour $k=2$, $x=\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$

Pour $k=3$, $x=\frac{\pi}{6}+3\pi=\frac{19\pi}{6}$

**2e famille :**

Pour $k'=1$, $x=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$

Pour $k'=2$, $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$

Pour $k'=3$, $x=-\frac{\pi}{6}+3\pi=\frac{17\pi}{6}$

Pour $k'=4$, $x=-\frac{\pi}{6}+4\pi=\frac{23\pi}{6}$

On donne l'ensemble des solutions dans $[0\,;4\pi]$.

$$\boxed{S_{[0\,;4\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\,;\frac{7\pi}{6}\,;\frac{11\pi}{6}\,;\frac{13\pi}{6}\,;\frac{17\pi}{6}\,;\frac{19\pi}{6}\,;\frac{23\pi}{6}\right\}}$$

## V. Inéquations trigonométriques

### 1°) Remarques préliminaires

- Il n'y a pas de règle.
- On utilise le cercle trigonométrique.

### 2°) Exemple

Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\sin 2x \geqslant \frac{1}{2}$.

**1^ère^ étape :**

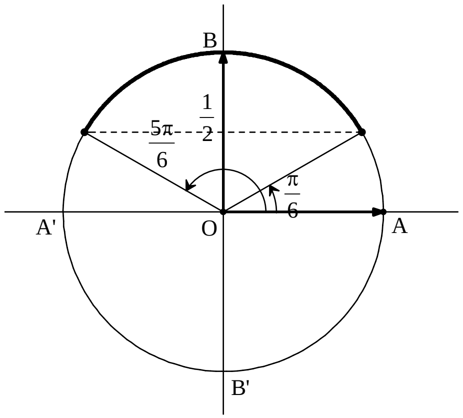
On pose : $X = 2x$.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leqslant 2x \leqslant \pi \qquad \times 2 \quad (2 > 0)$$

$$-\pi \leqslant X \leqslant \pi$$

Donc $\begin{cases} \sin X \geqslant \frac{1}{2} \\ X \in [-\pi\,;\,\pi] \end{cases}$




D'après le cercle trigonométrique :

$$\frac{\pi}{6} \leqslant X \leqslant \frac{5\pi}{6}$$



**2^e^ étape :**

Or $X = 2x$.

Donc $\frac{\pi}{6} \leqslant 2x \leqslant \frac{5\pi}{6}$

$$\frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12} \qquad : 2 \ (2 > 0)$$

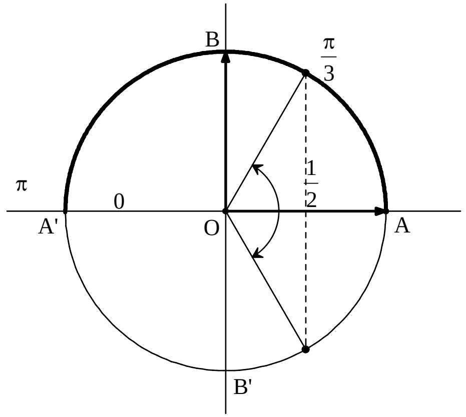
Soit $S$ l'ensemble des solutions de l'inéquation dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\boxed{S = \left[\frac{\pi}{12}\,;\,\frac{5\pi}{12}\right]}$$

## VI. Utilisation de la calculatrice

### 1°) Pour les cosinus

$\cos x = \frac{1}{2}$




**Calculatrice**

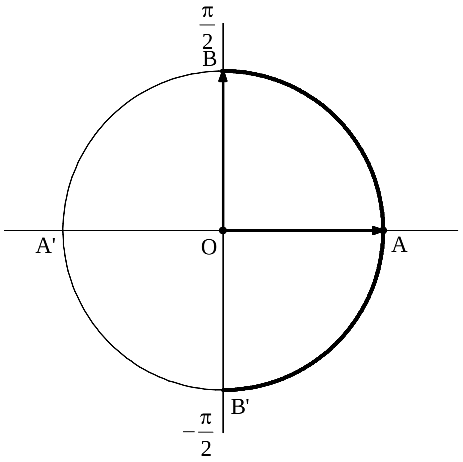
Mode radians :

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\cos}$ $0.5 = 1{,}04719\ldots$

$$\frac{\pi}{3}$$

**La calculatrice donne une valeur dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.**

**2°) Pour les sinus**




**La calculatrice donne une valeur dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.**

## VII. Point méthode pour la résolution d'une équation trigonométrique dans $\mathbb{R}$

• On regarde :

- s'il y a un cosinus dans un membre (et un seulement) : on essaie de transformer pour avoir deux cosinus ;

- s'il y a un sinus dans un membre (et un seulement) : on essaie de transformer pour avoir deux sinus ;

- s'il y a un cosinus dans un membre et un cosinus dans l'autre, on transforme le cosinus en sinus ou le contraire pour avoir soit une égalité de deux cosinus soit une égalité de deux sinus.

• Technique particulière : changement d'inconnue $X = \cos x$ ou $X = \sin x$.

• Il faut avoir des cosinus ou des sinus « purs » (pas de cosinus avec des carrés, des cubes…).