$1^{\text{ère}}$ S

Expériences aléatoires à plusieurs épreuves

Dans ce chapitre, on va étudier une méthode plus efficace que les arbres de possibilités pour traiter des situations d'expériences aléatoires constituées de deux ou trois épreuves avec un outil de dénombrement efficace : la **méthode des cases**.

Nous allons nous intéresser au cas des tirages de boules successifs dans une urne.

I. Tirages avec remise (et situations apparentées)

1°) Situation 1

Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5.
On tire **successivement** trois boules **avec remise** : après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne.
On note, dans l'ordre, les numéros des boules tirées.

On obtient une liste de trois chiffres, pas nécessairement distincts, pris parmi 1, 2, 3, 4 ou 5.

Pour dénombrer les issues possibles, au lieu d'un arbre, on peut utiliser le « remplissage de cases ».

On remplit trois cases numérotées 1, 2, 3, chacune d'elles avec l'un des chiffres :

Case 1	Case 2	Case 3
5 choix	**5 choix**	**5 choix**

Meilleure légende pour les cases :

1^{er} tirage	2^{e} tirage	3^{e} tirage
5 choix	**5 choix**	**5 choix**

Il y a cinq choix possibles pour la case 1, et pour chacun d'eux, cinq choix possibles pour la 2 (car la boule tirée est remise) ; donc 5×5 choix pour remplir les cases 1 et 2. Et pour chacun d'eux, encore cinq choix pour la case 3.

Il y a donc $5 \times 5 \times 5 = 5^3 =$ **125 issues possibles**.

2°) Situation 2

On lance deux dés dont les faces sont numérotées chacune de 1 à 6.

On utilise la même technique (deux cases puisqu'il y a deux dés).

Case 1	Case 2
6 choix	**6 choix**

Il y a $6 \times 6 =$ **36 issues possibles**.

Meilleure légende pour les cases :

1^{er} dé	2^{e} dé
6 choix	**6 choix**

3°) Ce qu'il faut retenir de la méthode des cases

La méthode des cases permet de dénombrer les résultats pour un arbre de possibilités qu'on ne peut pas faire en entier (on peut seulement l'esquisser sans le finir).

On retiendra dans ces deux exemples le principe multiplicatif après remplissage des cases de la gauche vers la droite.
Comme le tirage est effectué avec remise, on a le même nombre de choix dans chaque case.

D'une certaine manière, on peut dire que la méthode des cases est moins précise qu'un arbre car les résultats ne sont pas « apparents » (on n'a pas la liste de tous les résultats mais on a leur nombre, ce qui nous importe ici).

II. Tirages successifs sans remise

1°) Situation 1

Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5.
On tire **successivement** trois boules **sans remise** : après chaque tirage, la boule n'est pas remise dans l'urne.
On note, dans l'ordre, les numéros des boules tirées.

Case 1	Case 2	Case 3
5 choix	**4 choix**	**3 choix**

Il y a cinq choix possibles pour la case 1, mais pour chacun d'eux, seulement quatre choix pour la case 2 (la boule tirée n'étant plus remise). Donc 5×4 choix pour remplir les cases 1 et 2, et pour chacun, trois choix pour la case 3 (les deux boules tirées n'ont pas été remises).

Il y a donc $5 \times 4 \times 3 =$ **60 issues possibles**.

Meilleure légende pour les cases :

1er tirage	2^{e} tirage	3^{e} tirage
1 choix	**4 choix**	**3 choix**

2°) Situation 2

On reprend la situation précédente.
On suppose que les tirages sont effectués au hasard.
On suppose que ces derniers sont équiprobables.

Calculons la probabilité de l'événement A : « la deuxième boule tirée porte le N°4 » ?

Case 1	Case 2	Case 3
4 choix	**1 choix**	**3 choix**

Meilleure légende pour les cases :

1er tirage	2^{e} tirage	3^{e} tirage
4 choix	**1 choix**	**3 choix**

Une issue qui réalise A est obtenue en plaçant 4 dans la case 2 (il n'y a qu'un seul choix pour remplir la case 2).

Il reste alors quatre choix possibles pour la 1, et pour chacun trois choix pour la 3.

On notera l'ordre de remplissage des cases : case 2, case 1, case 3.

On pourrait d'ailleurs refaire un petit tableau en remettant les cases dans cet ordre comme suit :

Choix de la 2^{e} boule	Choix de la 1ère boule	Choix de la 3^{e} boule
1 choix	**4 choix**	**3 choix**

Donc 4×3 issues réalisent A.

Donc $P(\mathrm{A})=\dfrac{\cancel{4}\times\cancel{3}}{5\times\cancel{4}\times\cancel{3}}=\dfrac{1}{5}$.

Dans le cas où les tirages auraient été effectués avec remise, on aurait obtenus les nombre 5-1-5 dans les cases.

3°) Ce qu'il faut retenir

On retiendra de ces deux exemples le principe multiplicatif après remplissage des cases de la gauche vers la droite en tenant compte des choix en moins à chaque fois.

III. Notations des résultats

1°) Exemple de tirages successifs

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8.
On tire **successivement** 3 boules sans remise dans l'urne au hasard.
On note les numéros des boules tirées dans l'ordre.

Les résultats sont des triplets ordonnés : $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ où a, b, c désignent les numéros des boules tirées dans l'ordre d'apparition.

Attention, les résultats (1 ; 5 ; 3), (5 ; 3 ; 1), (3 ; 5 ; 1) etc… sont différents car les triplets sont ordonnés.

2°) Exemple de tirages simultanés

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10.
On tire **simultanément** 2 boules dans l'urne au hasard.
On note les numéros des boules tirées.

Les résultats sont des ensembles non ordonnés $\{a\ ;\ b\}$ où a et b désignent les numéros des boules tirées (on dit parfois qu'il s'agit de paires).

Attention, les résultats {5 ; 3} et {3 ; 5} sont identiques.

3°) Ce qu'il faut retenir des notations

• **Dans le cas de tirages successifs,** avec ou sans remise, (ou plus généralement d'expériences aléatoires à plusieurs épreuves), les résultats sont notés **dans l'ordre** avec des **parenthèses**.
Il s'agit de couples, triplets, quadruplets…

• **Dans le cas de tirages simultanés** (ou de situations analogues), les résultats sont notés **sans ordre** avec des **accolades**.

Ces remarques permettent éventuellement de décrire simplement l'univers des possibles associé dans les cas précédents.

IV. Cas des anagrammes

1°) Exemple

MARIE

Une **anagramme** est une permutation des lettres sans se soucier du sens.

Il y en a : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

2°) Notation

On note $5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

On lit « factorielle de 5 ».

3°) Définition et notation

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on appelle **« factorielle de *n* »** le produit de tous les entiers naturels de 1 à n.

On note ce nombre $n\,!$.

On a donc : note $n\,! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.

Cette notation permet de noter plus commodément certains produits.

Par convention, on pose également : $\boxed{\begin{array}{l} 0\,! = 1 \\ 1\,! = 1 \end{array}}$

Ces conventions permettent de faire les calculs.

Attention, on ne peut calculer que la factorielle d'un entier naturel.

4°) Nombre d'anagrammes d'un mot dont toutes les lettres sont distinctes

Propriété

Le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres ($n \geqslant 2$) dont toutes les lettres sont distinctes est $n\,!$.

5°) Utilisation de la calculatrice

Sur calculatrice TI

On va dans $\boxed{\text{math}}$ PRB puis on sélectionne 4 : !.

Attention, la calculatrice peut calculer la factorielle de n'importe quel entier jusqu'à 69.
Au-delà, elle est en dépassement de capacité (message « overflow » lorsque l'on tape 70 ! par exemple).

V. Quelque méthodes générales de dénombrement

1°) Les principes fondamentaux

● Principe additif :

Lorsqu'une opération O peut être réalisée en effectuant
- soit une opération O_1 (avec n_1 possibilités)
- soit une opération O_2 (avec n_2 possibilités)

O_1 et O_2 étant incompatibles,
le nombre de façons de réaliser O est égal à $n_1 + n_2$.

● Principe multiplicatif :

Lorsqu'une opération O peut être réalisée en effectuant une opération O_1 (avec n_1 possibilités)
puis une opération O_2 (avec n_2 possibilités),
alors le nombre de façons de réaliser O est égal à $n_1 \times n_2$.

soit O_1
soit O_2 ← on additionne

O_1 **puis** O_2 ← on multiplie

2°) Raisonnements importants en dénombrement

- Disjonction de cas
- Principe multiplicatif
- Opérations successives
- Méthode des cases
- Raisonnement par cas contraire

(cf. exemples de la suite du cours)