1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur le radian

$\boxed{1}$ 1°) Donner la mesure en radians d'un angle de 36°.

2°) Donner la mesure en degrés d'un angle de $\dfrac{13\pi}{12}$ rad.

$\boxed{2}$ Sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 10 cm, un arc $\overset{\frown}{AB}$ a pour longueur 5 cm.
Déterminer la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

$\boxed{3}$ Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 6 cm.
Soit A et B deux points de $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{AOB} = 24°$.

Calculer la longueur du grand arc $\overset{\smile}{AB}$.

$\boxed{4}$ Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{4}$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{3\pi}{5}$.

Calculer la mesure en radians de l'angle $\widehat{ACB}$.

Corrigé

● Rappel sur la notation de la longueur d'un arc de cercle :

La longueur d'un arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ est notée $\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right)$.

Par exemple, si la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est égale à 3 cm, on écrira : $\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 3 \text{ cm}$.

● Chaque lettre doit être clairement introduite avant son utilisation dans un calcul.
Par exemple, on écrira « Soit *x* la mesure en radians de l'angle … ».

$\boxed{1}$ Conversions

1°) **Convertissons 36° en radians.**

On note *x* la mesure en radians correspondante.

36°	180°
***x* rad**	π rad

$$x = \frac{36 \times \pi}{180}$$

$$= \frac{\pi}{5} \quad \text{(pas d'unité)}$$

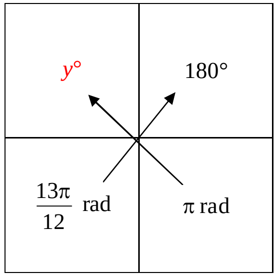
On laisse la valeur exacte en fonction de π.

$$\mathbf{36° = \frac{\pi}{5} \text{ rad}}$$

On pourrait écrire $0{,}2\pi$ mais, en général, on ne le fait pas.

2°) **Convertissons $\dfrac{13\pi}{12}$ rad en degrés.**

On note y la mesure en degrés correspondante.



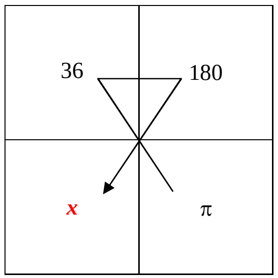
$$y=\frac{180\times\dfrac{13\pi}{12}}{\pi}$$

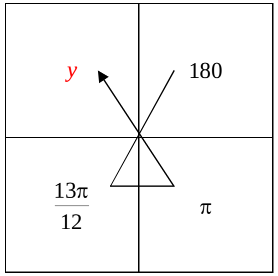
$$=\frac{180\times 13\cancel{\pi}}{12\cancel{\pi}}$$

$$=195$$

$\dfrac{13\pi}{12}$ **rad = 195°** (angle rentrant)

Présentation de la recherche d'une quatrième proportionnelle :





$\boxed{2}$ **Solution détaillée :**

$\mathcal{C}$: cercle de centre O et de rayon 10 cm

$A \in \mathcal{C}$

$B \in \mathcal{C}$

$\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right)=5$ cm

Déterminons la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

Attention (rappel de notation) : la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ se note $l\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ ou $\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right)$.

Il n'est pas possible de faire une figure exacte au début de l'exercice (à moins d'utiliser un fil ou une ficelle pour construire l'arc $\overset{\frown}{AB}$!).

On ne peut faire la figure une fois que l'on a répondu à la question (ce peut d'ailleurs être une question motivant la formule donnant l'expression de la longueur d'un arc).

On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.

On a : $\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right)=10\times\alpha$.

Donc $5=10\times\alpha$ d'où $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

$\widehat{AOB}=\dfrac{1}{2}$ rad

On note β la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$.

$\beta=\dfrac{0{,}5\times 180}{\pi}=\dfrac{90}{\pi}$ (valeur exacte)

On fait un tableau de proportionnalité pour convertir en degrés la mesure en radians (« tableau de conversion »). Il s'agit d'un tableau à 4 cases (2 lignes, 2 colonnes). On cherche une « quatrième proportionnelle ».

On utilise la touche « π » de la calculatrice pour donner une valeur approchée de la mesure en degré de l'angle $\widehat{AOB}$.

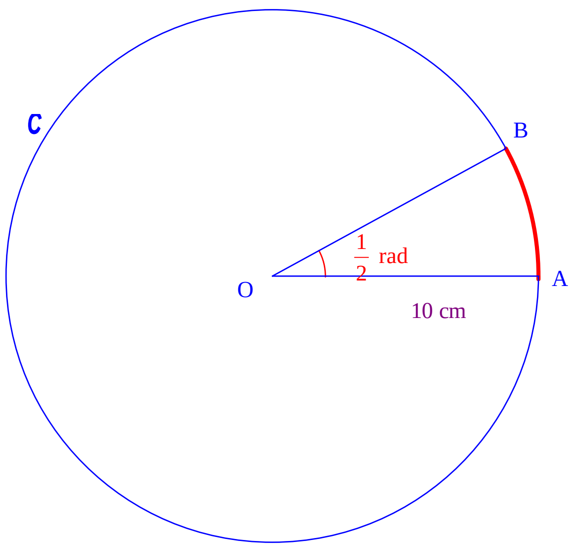
D'après la calculatrice, on a : $\beta = 28{,}647...$ (attention aux petits points de suspension indispensables)

La valeur arrondie au centième de β [mesure en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$] est égale à 28,65.

On pourra écrire $\widehat{AOB} \approx 28{,}65°$ (valeur arrondie au centième).

À la fin de cet exercice on peut faire <u>une</u> figure ; mais attention, il s'agit d'une figure approximative (car la valeur exacte de la mesure en degré de l'angle $\widehat{AOB}$ ne permet pas de construire cet angle à la règle et au compas).
Il y a une infinité de figures possibles mais, une fois que l'on a placé A, il y a deux positions possibles pour B (symétriques par rapport à la droite (OA)).

Faire la figure au compas.



Il est possible de donner le résultat en degrés, minutes d'angles etc. en utilisant la calculatrice (angles sur les TI, sélectionner DMS).

$\boxed{3}$ La longueur du grand arc $\overset{\smile}{AB}$ est égale à $\dfrac{56\pi}{5}$ cm.

Solution détaillée :

$\mathcal{C}$: cercle de centre O et de rayon 6 cm
$A \in \mathcal{C}$
$B \in \mathcal{C}$
$\widehat{AOB} = 24°$

Calculons la longueur du grand arc $\overset{\smile}{AB}$.

On calcule la mesure de l'angle $\overset{\smile}{AOB}$ rentrant :

$\overset{\smile}{AOB} = 360° - \widehat{AOB} = 360° - 24° = 336°$ (présentation en colonne préférable)

On convertit 336° en radians : $\dfrac{336 \times \pi}{180} = \dfrac{28\pi}{15}$.

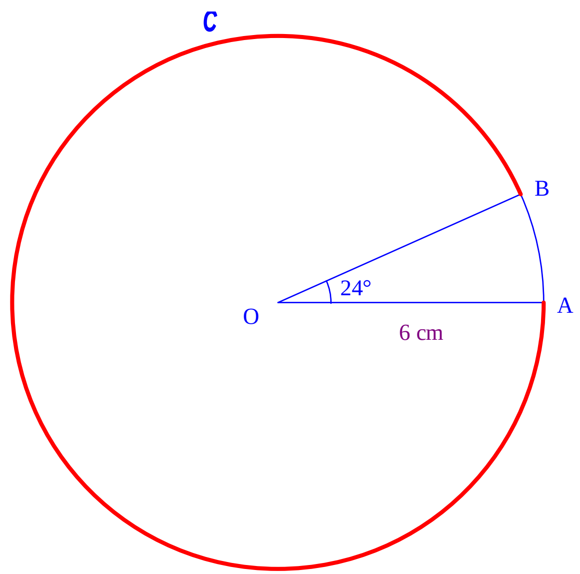
$336° = \dfrac{28\pi}{15}$ rad

Donc :

$\text{long}(\overset{\smile}{AB}) = 6 \times \dfrac{28\pi}{15}$ cm

$\text{long}(\overset{\smile}{AB}) = \dfrac{56\pi}{5}$ cm

Faire la figure (à l'échelle) au compas.



Pourquoi utilisons-nous l'angle $\overset{\smile}{AOB}$ et pas $\widehat{AOB}$?

Parce qu'on cherche la longueur du grand arc et donc l'angle rentrant (voir figure)

Grand arc* : l'angle au centre associé est l'angle rentrant.

Petit arc** : l'angle au centre associé est saillant (longueur inférieure à celle du demi-périmètre du cercle).

* longueur supérieure à celle du demi-périmètre du cercle.
** longueur inférieure à celle du demi-périmètre du cercle.

Si on demande de calculer la longueur du grand arc $\overset{\smile}{AB}$, il faut calculer $\overset{\smile}{AOB}$ et pas $\widehat{AOB}$, le convertir en radian et le multiplier par la longueur du rayon.

Autre méthode :

On calcule la longueur du petit arc $\overset{\frown}{AB}$.

Pour cela, on commence par calculer la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.

$$24° = \frac{2\pi}{15} \text{ rad}$$

$$\begin{aligned}\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right) &= 6 \times \frac{2\pi}{15} \text{ cm}\\ &= \frac{4\pi}{5} \text{ cm}\end{aligned}$$

On calcule le périmètre du cercle $\mathcal{C}$.
Ce périmètre est égal à 12π.

$$\begin{aligned}\text{long}(\overset{\smile}{AB}) &= 12\pi - \frac{4\pi}{5}\\ &= \frac{60-4\pi}{5}\\ &= \frac{56\pi}{5} \text{ cm}\end{aligned}$$

$\boxed{4}$

ABC : triangle tel que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{5}$

Calculons la mesure en radians de l'angle $\widehat{ACB}$.

La somme des mesures en radian des angles d'un triangle est égale à π.

$\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = \pi$ (on ne repasse pas par le degré).

$$\begin{aligned}\text{Donc } \widehat{ACB} &= \pi - \left(\widehat{ABC} + \widehat{BAC}\right)\\ &= \pi - \left(\frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \pi - \frac{17\pi}{20}\\ &= \frac{3\pi}{20}\end{aligned}$$

La mesure en radians de l'angle $\widehat{ACB}$ est $\frac{3\pi}{20}$.

Remarques :

- L'unité radian est sous-entendue. On ne l'écrit pas.
- Attention à ne pas écrire : « Donc l'angle $\widehat{ACB} = \frac{3\pi}{20}$ rad ».
- On peut faire une figure dès le début.