Le problème des tangentes issues d'un point à un cercle

Rappels sur la tangente à un cercle

Définition :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point de $\mathcal{C}$.

La tangente en A à $\mathcal{C}$ est la droite passant par A et perpendiculaire à (OA).

Autrement dit, la tangente en un point à un cercle est la perpendiculaire au rayon en ce point.

La construction géométrique de la tangente à un cercle en un point découle de la définition : on utilise la règle et l'équerre.

Remarques :

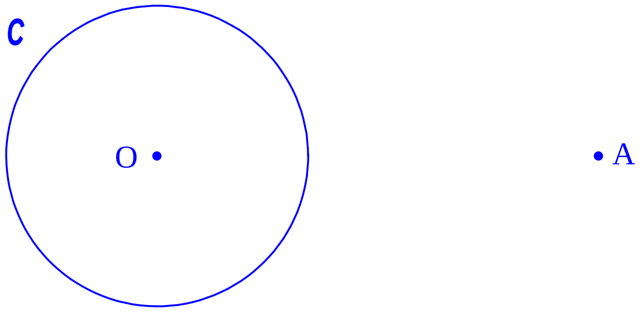
● Le mot « tangente » vient du verbe latin « tango, is, ere » qui signifie toucher (qui a donné en français les mots « tangible », « tactile » ainsi que le mot « tango », danse où les partenaires se touchent).

● On prendra garde à l'orthographe du mot « tangente » : après le e, il y a un n et non un a !

● Au XVII^{e} siècle, on parlait de « touchante » à un cercle (en rapport avec ce qui a été dit sur l'étymologie du mot « tangente ») et non de « tangente ».

I. Un problème de construction

On se donne un cercle $\mathcal{C}$ et A un point extérieur à $\mathcal{C}$.



On cherche à construire les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A.

Matériel autorisé :

- règle non graduée

- compas

Construction approchée :

On fait pivoter la règle autour du point A.

On cherche les positions de la droite telles que l'on obtienne un point d'intersection.

On obtient deux tangentes.

Cette construction est approchée. On va chercher une construction exacte.

Construction exacte :

On va effectuer un raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse :

Si T est un point du cercle tel que (AT) soit tangente à $\mathcal{C}$, alors l'angle $\widehat{\text{OTA}}$ est droit donc T appartient au cercle de diamètre [OA].

Synthèse (programme de construction) :

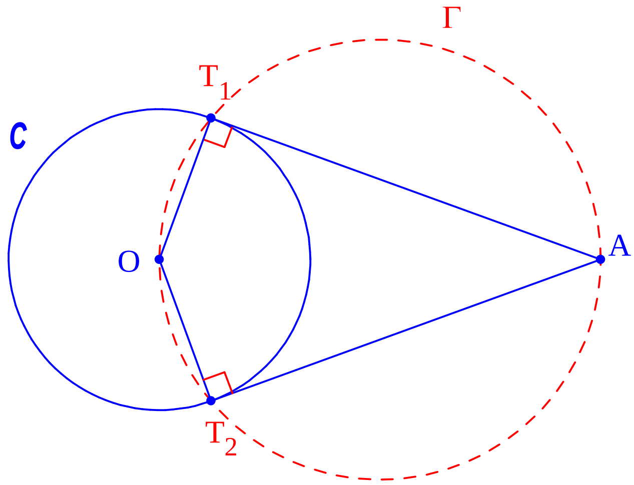
On trace le segment [OA].

À la règle et au compas, on construit le milieu de [OA].

On trace le cercle Γ de diamètre [OA].

Γ et $\mathcal{C}$ se coupent en deux points T_1 et T_2.

Les droites (AT_1) et (AT_2) sont les tangentes à $\mathcal{C}$ issues de A.



Cette construction peut être entièrement réalisée à la règle et au compas.
Elle est considérée comme satisfaisante.

Autre méthode :

On propose la construction puis on présente une démonstration montrant que la construction fonctionne bien.

Quelle que soit la méthode, on utilise le théorème de 4^e que l'on peut formuler sous l'un des deux énoncés suivants :

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, on obtient un angle droit.

Si un triangle est inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre, alors ce triangle est rectangle.

Dans l'Antiquité, on s'intéresse à la résolution de problème de construction à la règle et au compas (cf. célèbre tableau de Raphaël intitulé l'École d'Athènes, qui présente dans un « coin » Euclide réalisant une figure à l'aide d'un compas, anachronisme car Euclide ne fait pas partie de l'École d'Athènes puisqu'il a vécu plus tard à Alexandrie !).

Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique

Avec *Geogebra*, il y a une commande qui permet de tracer les tangentes issues d'un point à un cercle.

II. Étude de la configuration-conséquences importantes

La droite (OA) est axe de symétrie de la figure donc :

- $\mathbf{AT_1 = AT_2}$

- $\widehat{\mathbf{OAT_1}} = \widehat{\mathbf{OAT_2}}$ (la droite (OA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{T_1AT_2}$)

- Il est à souligner l'efficacité du raisonnement par transformation effectué ici.

- L'égalité $AT_1 = AT_2$ peut aussi être obtenue en appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles OAT_1 et OAT_2.