TS

Limites de suites (3)

I. Rappels sur les suites majorées, minorées, bornées

1°) Définition 1 (suite majorée, minorée, bornée)

u est une suite.

● On dit que u est **majorée** pour exprimer qu'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$ (M est un **majorant** de la suite).

● On dit que u est **minorée** pour exprimer qu'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$ (m est un **minorant** de la suite).

● On dit que u est **bornée** pour exprimer qu'il existe deux réels m et M tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant u_n \leqslant M$.

2°) Définition 2 (majorant, minorant)

● Un majorant d'une suite u est un réel fixe (indépendant de n) tel que tous les termes de la suite soient inférieurs ou égaux à ce réel.

● Un minorant d'une suite u est un réel fixe (indépendant de n) tel que tous les termes de la suite soient supérieurs ou égaux à ce réel.

3°) Interprétation graphique

● u est **majorée** par un réel M signifie que tous les points de sa représentation graphique dans un repère du plan sont situés au-dessous ou sur la droite d'équation $y = M$.

● u est **minorée** par un réel m signifie que tous les points de sa représentation graphique dans un repère du plan sont situés au-dessus ou sur la droite d'équation $y = m$.

● u est **bornée** par deux réels m et M signifie que tous les points de sa représentation graphique dans un repère du plan sont situés dans la bande de plan limitée par les droites d'équations $y = m$ et $y = M$.

4°) Exemple

La suite de terme général $(-1)^n$ est bornée (par – 1 et 1).

5°) Propriété

● Si un réel M est un majorant d'une suite u, alors tous les réels supérieurs ou égaux à M sont aussi des majorants de la suite u.

● Si un réel m est un minorant d'une suite u, alors tous les réels inférieurs ou égaux à m sont aussi des minorants de la suite u.

Cette propriété se démontre très facilement.

Cette propriété justifie l'emploi de l'article indéfini quand on parle de majorant ou de minorant d'une suite.

II. Limites des suites monotones

1°) Propriété

● Si une suite croissante a pour limite le réel L, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à L.

● Si une suite décroissante a pour limite le réel L, alors tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à L.

2°) Démonstration

On se place dans le cas d'une suite croissante convergente ; la démonstration est analogue dans le cas d'une suite décroissante convergente.

Considérons une suite croissante (u_n) de limite L.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe terme $u_p > \text{L}$.

Alors par croissance de la suite, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p > \text{L}$.

L'intervalle $]\text{L} - 1\ ;\ u_p[$ contient L mais ne peut contenir des termes u_n que pour $n < p$, donc il ne contiendra pas tous les termes à partir du rang p.
Ceci contredit le fait que la suite ait pour limite L. Donc pour tout n, $u_n \leqslant \text{L}$.

3°) Autre formulation

● Si une suite croissante a pour limite le réel L, alors L est un majorant de la suite.

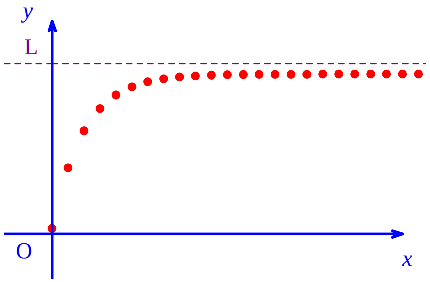
● Si une suite décroissante a pour limite le réel L, alors L est un minorant de la suite.

On notera l'utilisation de l'article indéfini.

III. Théorèmes de convergence pour les suites monotones

1°) Théorème des suites monotones majorées ou minorées (admis sans démonstration)

> ***u* est une suite monotone.**
>
> **• Si *u* est croissante et majorée, alors elle converge (vers une limite finie).**
>
> **• Si *u* est décroissante et minorée, alors elle converge (vers une limite finie).**



2°) Précision sur la limite d'une suite croissante majorée ou d'une suite décroissante minorée

Grâce à la propriété du paragraphe **II**, on peut dire que :

- la limite d'une suite croissante majorée est un majorant de cette suite ;

- la limite d'une suite décroissante minorée est un minorant de cette suite.

On peut préciser ce majorant ou ce minorant grâce aux résultats suivants qui seront démontrés dans l'enseignement supérieur :

- la limite d'une suite croissante majorée est le plus petit des majorants de la suite

- la limite d'une suite décroissante minorée est le plus grand des minorants de la suite.

3°) Mise en garde

Ce théorème est un théorème d'existence de limite ; il ne permet pas de la trouver.

Exemple de raisonnement faux :

Si *u* est une suite décroissante et minorée par 0, alors *u* converge vers 0 (on n'en a aucune certitude).

IV. Théorème de divergence pour les suites monotones

1°) Théorème des suites monotones non majorées ou non minorées

> ***u* est une suite monotone.**
>
> **• Si *u* est croissante non majorée, alors *u* diverge vers $+\infty$.**
>
> **• Si *u* est décroissante non minorée, alors *u* diverge vers $-\infty$.**

2°) Démonstration

On effectue la démonstration dans un cadre général abstrait : on ne connaît pas le terme général de la suite (u_n).

Hypothèses $\begin{cases} u \text{ est croissante } (H_1) \\ u \text{ est non majorée } (H_2) \end{cases}$

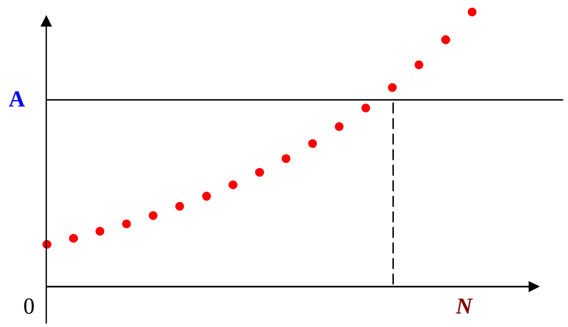
But : démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration avec la définition :

Il faut démontrer que tout intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.

On pose $I = [A\,;+\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$).
D'après (H_2), A n'est pas un majorant de *u*.
A majorant signifie que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant A$.

Par négation, il existe donc un entier naturel N tel que $u_N > A$ (1).



Or d'après (H_1), *u* est croissante.

Donc si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant u_N$ (2).

(1) et (2) donnent :

si $n \geqslant N$, alors $u_n > \mathrm{A}$.

si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \mathrm{I}$.

On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

V. Bilan sur la limite d'une suite monotone

En reprenant les résultats des paragraphes **III** et **IV**, on peut résumer ainsi :

Une suite croissante est
- **soit convergente (si elle est majorée)**
- **soit divergente vers + ∞ (si elle n'est pas majorée)**

Une suite décroissante est
- **soit convergente (si elle est minorée)**
- **soit divergente vers – ∞ (si elle n'est pas minorée)**

VI. Détermination de la limite d'une suite récurrente

1°) Une situation fréquente

u est une suite définie par récurrence.
On suppose que *u* converge (par exemple, on a démontré que *u* est croissante majorée ou décroissante minorée).
On cherche sa limite.

2°) Exemple

u est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$.

On démontre facilement par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 0$

u est décroissante minorée donc elle converge.

On note l sa limite.

Déterminons l.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ (évident d'après la définition d'une suite qui converge vers un réel)

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} =$
- l
- $\dfrac{1}{2}l + 1$ (car $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$)

Par unicité de la limite d'une suite, $l = \dfrac{1}{2}l + 1$.

Donc $l = 2$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

3°) Résultat général sur les suites récurrentes : « théorème du point fixe » (hors programme)

***f* est une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.**

***u* est une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.**

Si $\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l & \text{(H1)} \\ l \in \mathrm{I} & \text{(H2)} \\ f \text{ est continue sur I} & \text{(H3)} \end{array}\right\}$, alors $l = f(l)$.

VII. Étude d'une suite du type $\boxed{u_{n+1} = f\left(u_n\right)}$

• Pour conjecturer son comportement

On utilise la représentation graphique de type « web » de la suite sur une calculatrice ou un logiciel.

• Pour démontrer qu'elle converge

Quand f est croissante, on démontre souvent par récurrence, que la suite est croissante-majorée, ou décroissante-minorée.

• Pour déterminer sa limite L, si elle converge, on cherche la limite de $f\left(u_n\right)$ par théorèmes d'opérations et on exprime qu'elle doit être égale à L.

On arrive ainsi souvent au fait que L vérifie $f\left(\mathrm{L}\right) = \mathrm{L}$. Graphiquement, L est alors l'abscisse d'un point d'intersection de la courbe de f et de la droite Δ : $y = x$.

• Pour déterminer le premier indice n tel que $\left| u_n - \mathrm{L} \right| < \varepsilon$ (où ε est un réel strictement positif), on peut réaliser un programme sur calculatrice ou sur logiciel avec une boucle « Tantque » (algorithme de valeur seuil).

VIII. Appendice : unicité de la limite d'un suite convergente

1°) Propriété

Si une suite converge, sa limite est unique.

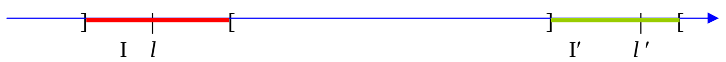
2°) Démonstration

On considère une suite u telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ (H_1) et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l'$ (H_2).

Avec la définition donnée, on va démontrer que $l = l'$.

On raisonne par l'absurde : on suppose que $l \neq l'$.

On choisit un intervalle ouvert I contenant l et un intervalle ouvert I′ contenant l' tels que $\mathrm{I} \cap \mathrm{I}' = \varnothing$ (H_3).



Pour la figure, on suppose que $l < l'$.

D'après (H_1), comme I est un intervalle ouvert contenant l, on peut trouver un entier naturel N_1 tel que si $n \geqslant N_1$, alors $u_n \in \mathrm{I}$.

D'après (H_2), comme I′ est un intervalle ouvert contenant l', on peut trouver un entier naturel N_2 tel que

si $n \geqslant N_2$, alors $u_n \in \mathrm{I}'$.

Exemple :

$N_1 = 1000$ donc u_{1000}, u_{1001}, u_{1002} … sont dans I.
$N_2 = 1500$ donc u_{1500}, u_{1501}, u_{1502} … sont dans I′.

On note N le plus grand des entiers N_1 et N_2.

Si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \mathrm{I}$ et $u_n \in \mathrm{I}'$.
Impossible car $\mathrm{I} \cap \mathrm{I}' = \varnothing$ d'après H_3.

C'est ce qu'on appelle **<u>l'unicité de la limite</u>** c'est-à-dire lorsqu'une suite admet une limite finie, celle-ci est unique.
On dit que c'est « la » limite de la suite.

Cette démonstration est un exemple d'utilisation (de mise en œuvre) de la définition d'une suite convergente.

Cours oral

Le cours répond à la question suivante :

Problème : Peut-on dire quelque chose pour la limite d'une suite croissante ou décroissante ?

Objectif : Relier comportement global et comportement asymptotique d'une suite.

Le cours ne répond pas à la question pour les suites non monotones.

Pour les suites non monotones, des indications seront données dans les énoncés.