1$^{\text{ère}}$ S **Exercices sur le plan muni d'un repère orthonormé**

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 On donne les points A(2 ; 2), B(– 3 ; – 3) et C(2 ; – 3). On note H le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses et K le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées.
Démontrer que (OC) $\perp$ (HK).

2 On note D et D' les droites d'équations réduites respectives $y = \frac{3}{2}x + 3$ et $y = -2x + 10$.
La droite D coupe l'axe des ordonnées en B, D' coupe l'axe des abscisses en C et D et D' se coupent en A.
Faire une figure.
Déterminer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

3 On donne les points $A\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ et C(3 ; 3). La droite D passant par C et perpendiculaire à (AB) coupe l'axe des abscisses en I.
Faire une figure.
Calculer l'abscisse de I.

4 On donne les points les points $A\left(-\frac{7}{2} ; 2\right)$, $B(-2 ; 5)$, $C\left(5 ; \frac{13}{2}\right)$ et $D\left(\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.
Pour la figure, prendre le centimètre pour unités graphique.

1°) Démontrer que ABCD est un trapèze rectangle.
2°) Calculer son aire.

5 On considère les vecteurs $\vec{u}$ (4 ; – 3) et $\vec{v}$(– 5 ; 12).
Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

6 On considère les points les points A(1 ; 2), B(– 3 ; 0), $C\left(-1-\sqrt{3} ; 1+2\sqrt{3}\right)$.
Calculer AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

7 On considère la droite D d'équation cartésienne $3x - 5y + 1 = 0$ ainsi que les points A(6 ; – 8) et B(0 ; 2).
Démontrer que $D \perp$ (AB).

8 Pour tout réel m, on note D_m la droite d'équation cartésienne $(m+1)x - (3m-1)y + m - 4 = 0$.
On donne les points A(6 ; – 8) et B(0 ; 2).
1°) Déterminer m tel que $D_m \perp$ (AB).
2°) Déterminer m tel que D_m // (AB).

9 On considère les points A(3 ; – 2) et B(5 ; 2).
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) en rédigeant.

10 On considère les points A(– 3 ; – 2), B(4 ; 5) et C(– 1 ; 2).
Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par C et parallèle à (AB).

11 On considère les points A(– 1 ; – 1), B(6 ; 1) et C(3 ; 3).
Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par C.

12 On considère les points A(4 ; 1) et B(0 ; 5). On rappelle que O est l'origine du repère.
On note Δ la hauteur issue de A et Δ' la hauteur issue de B dans le triangle OAB.
1°) Déterminer l'équation réduite de Δ et une équation cartésienne de Δ'.
2°) En déduire par le calcul les coordonnées de l'orthocentre H du triangle OAB.
Vérifier le résultat sur la figure.

13 Déterminer une équation cartésienne sous forme développée du cercle $\mathcal{C}$ dans chacun des cas suivants.
1°) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A(1 ; – 3) et de rayon 2.
2°) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A(– 1 ; 1) passant par O.
3°) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A(– 1 ; 1) et passant par le point B(3 ; 2).
4°) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A(3 ; 2) et tangent à l'axe des ordonnées.
5°) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A(– 2 ; – 3) et tangent à l'axe des abscisses.
6°) $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre [AB] avec A(0 ; 1) et B(3 ; 0).

14 Déterminer la nature des ensembles suivants définis par une équation cartésienne.
$E_1 : x^2 + y^2 - 3x - 4y = -4$; $E_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7 = 0$; $E_3 : x^2 + y^2 - 2x - 2y = -2$.

15 1°) Construire le cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$.
2°) Ce cercle coupe l'axe des abscisses en A et B et l'axe des ordonnées en C et D. Déterminer les coordonnées des ces quatre points.
On conclura ainsi :
$\mathcal{C} \cap (Ox)$ = {A ; B} avec A(…. ; ….) et B(…. ; ….) ;
$\mathcal{C} \cap (Oy)$ = {C ; D} avec C(…. ; ….) et D(…. ; ….).

16 1°) Construire le cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 7 = 0$ et la droite D d'équation cartésienne $x - y + 3 = 0$.
2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.
$\mathcal{C} \cap D$ = {A ; B} avec A(…. ; ….) et B(…. ; ….).

17 On considère les points I(3 ; 2) et A(1 ; 5).
1°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre I passant par A.
2°) On note Δ la tangente à $\mathcal{C}$ en A (perpendiculaire au rayon [IA] passant par A).
Déterminer une équation cartésienne de Δ.

18 On note $\mathcal{C}_m$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 + 4x + 2y + m = 0$ où m est un réel donné.
Déterminer la nature de $\mathcal{C}_m$ suivant les valeurs de m.

19 Soit D et D' les droites d'équations respectives $y = mx + 1$ et $y = -4mx + 3$ où m est un réel donné.
Déterminer les valeurs de m telles que $D \perp D'$.

20 Soit ABCD un carré de côté a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].
Faire une figure codée en prenant (AB) « horizontale », A en bas à gauche, B à droite, C et D « au-dessus » de (AB).
1°) Démontrer que le repère $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$ est orthonormé.
2°) Démontrer en utilisant ce repère que : (AJ) $\perp$ (DI).

Corrigé

1 On peut donner directement les coordonnées des points H(– 3 ; 0) et K(0 ; 2) qui sont les projetés orthogonaux respectifs de B et A sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

On calcule $\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{HK} = 0$. On en déduit que (OC) ⊥ (HK).

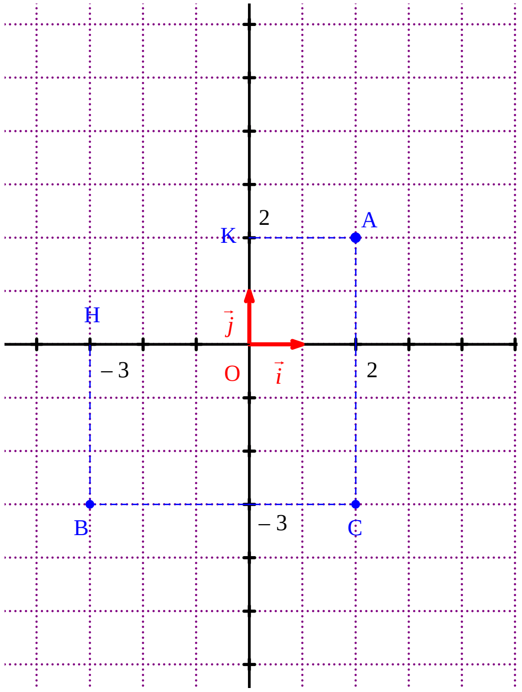
Solution détaillée :

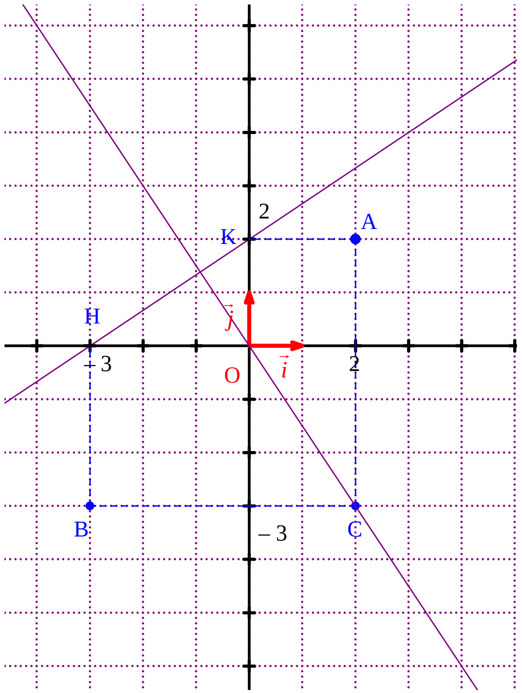
A(2 ; 2)   B(– 3 ; – 3)   C(2 ; – 3)

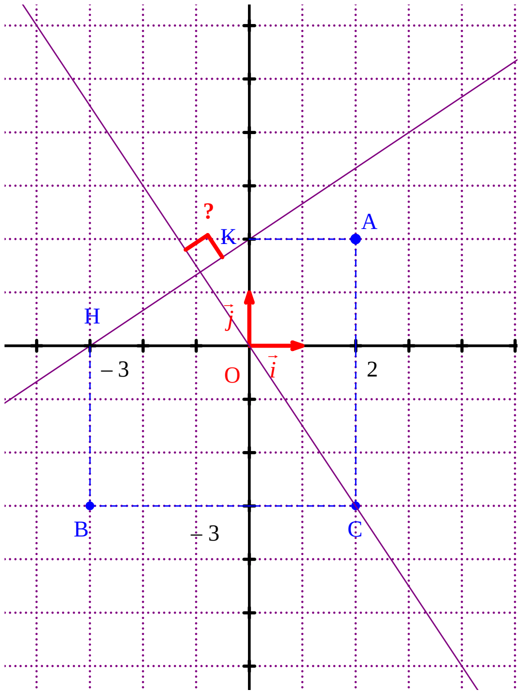
H : projeté orthogonal de B sur (O*x*)

K : projeté orthogonal de A sur (O*y*)

Figure :







Démontrons que (OC) $\perp$ (HK).

H(–3 ; 0)   K(0 ; 2) (on peut donner immédiatement sans explication les coordonnées de H et K)

$\overrightarrow{OC}\left|\begin{array}{l}2\\-3\end{array}\right.$ $\overrightarrow{HK}\left|\begin{array}{l}3\\2\end{array}\right.$

$\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{HK} = 2\times 3+(-3)\times 2$

$= 0$

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{HK}$ est nul.

Donc on en déduit que (OC) $\perp$ (HK).

$\boxed{2}$ A(2 ; 6) ; B(0 ; 3) ; C(5 ; 0)

$\overrightarrow{AB}(-2\,;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;-6)$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=12$

$AB=\sqrt{13}$; $AC=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\ldots=\dfrac{4}{\sqrt{65}}$; $\widehat{BAC}\approx 60{,}3°$ (valeur arrondie au dixième)

Solution détaillée :

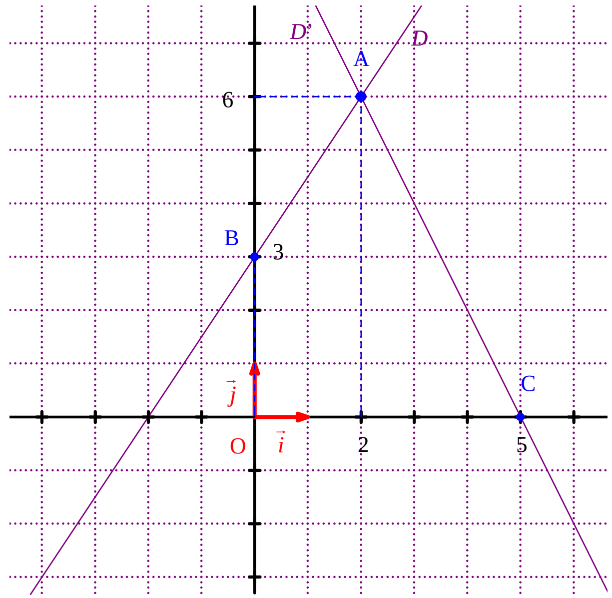
$D:\ y=\dfrac{3}{2}x+3$

$D'\ :\ y=-2x+10$

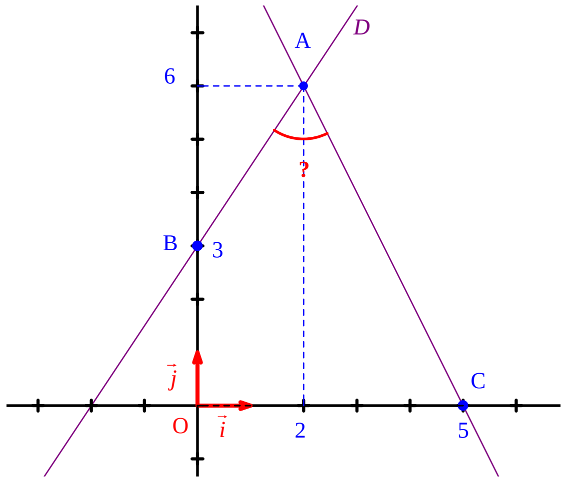
$D\cap(Oy)$ = { B }

$D'\cap(Ox)$ = { C }

$D\cap D'$ = { A }



On marque l'angle $\widehat{BAC}$ avec un point d'interrogation.



Déterminons la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.

On commence par calculer les cordonnées des points A, B, C.

• Calcul des coordonnées de A :

A est le point d'intersection des droites D et D' donc on a : $\frac{3}{2}x_A + 3 = -2x_A + 10$.

On obtient $\frac{7}{2}x_A = 7$ donc $x_A = 2$.

On calcule ensuite $y_A = -2x_A + 10$ d'où $y_A = 6$.

Autre rédaction possible pour le calcul des coordonnées de A :

« Les coordonnées de A sont solutions du système $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ y = -2x + 10 \end{cases}$

• Calcul des coordonnées de B :

L'ordonnée à l'origine de la droite D est égale à 3 donc B(0 ; 3).

• Calcul des coordonnées de C :

C $\in$ (Ox) donc $y_C = 0$ d'où $-2x_C + 10 = 0$ d'où $x_C = 5$.
Par conséquent C(5 ; 0).

$\overrightarrow{AB}(-2\,;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;-6)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times 3 + (-3) \times (-6)$
$= 12$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{4+9} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{3^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{9+36} \\ &= \sqrt{45} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \widehat{BAC} &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} \\ &= \frac{12}{\sqrt{13} \times 3\sqrt{5}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{65}} \end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on obtient : $\widehat{\text{BAC}} = 60{,}255118\ldots$ °.

(sur la calculatrice TI-83 Plus on tape $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{cos}}$ 4 $\boxed{\div}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ 65 $\boxed{)}$ $\boxed{)}$; on ne calcule pas d'abord une valeur approchée de $\frac{4}{\sqrt{65}}$)

On en déduit que : $\boxed{\widehat{\text{BAC}} \approx 60{,}3\text{ ° (valeur arrondie au dixième)}}$.

On effectue la vérification au rapporteur sur la figure.

$\boxed{\textbf{3}}$ $x_I = \frac{3}{4}$

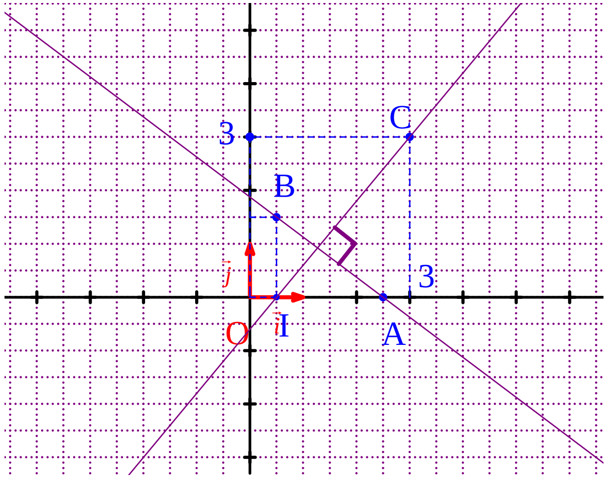
Solution détaillée :

A$\left(\frac{5}{2}\,;0\right)$ B$\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ C(3 ; 3)

D : droite passant par C et perpendiculaire à (AB)

$D \cap$ (Ox) = { I }

Figure :



On marque le codage de l'angle droit.

Calculons l'abscisse de I.

I ∈ (Ox) donc $y_I = 0$

(CI) ⊥ (AB) donc les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Par conséquent, $\overrightarrow{CI} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{CI}\left|\begin{array}{l} x_I - x_C = x_I - 3 \\ y_I - y_C = -3 \end{array}\right.$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A = -2 \\ y_B - y_A = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Donc $(x_I - 3) \times (-2) + \dfrac{3}{2} \times (-3) = 0$

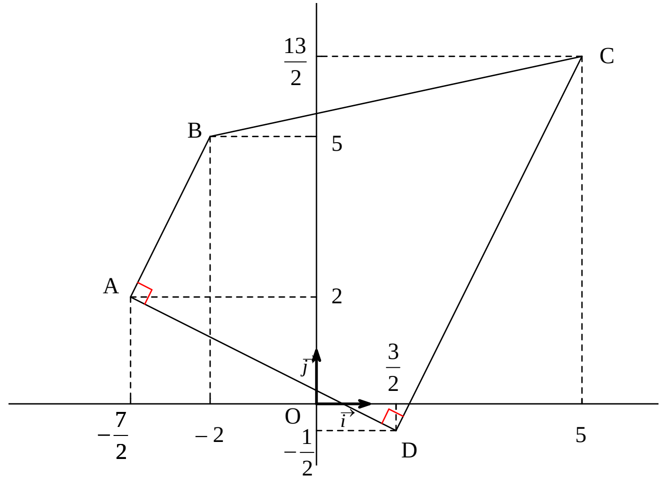
$-2x_I + 6 - \dfrac{9}{2} = 0$

$2x_I = \dfrac{12-9}{2}$

$x_I = \dfrac{3}{4}$

$\boxed{4}$ Faire une figure. Tracer des pointillés (à la règle) avec les coordonnées des points sur les axes.

$A\left(-\dfrac{7}{2}\,;2\right)$, $B(-2\,;5)$, $C\left(5\,;\dfrac{13}{2}\right)$, $D\left(\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$



1°) **Démontrons que ABCD est un trapèze rectangle.**

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A = -2 + \dfrac{7}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_B - y_A = 5 - 2 = 3 \end{array}\right.$; $\overrightarrow{AD}\left|\begin{array}{l} x_D - x_A = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2} = 5 \\ y_D - y_A = -\dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$; $\overrightarrow{DC}\left|\begin{array}{l} x_C - x_D = 5 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2} \\ y_C - y_D = \dfrac{13}{2} + \dfrac{1}{2} = 7 \end{array}\right.$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AD}} = \dfrac{3}{2} \times 5 + 3 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ d'où (AB) ⊥ (AD).

$\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{DC} = x_{\overrightarrow{AD}} \times x_{\overrightarrow{DC}} + y_{\overrightarrow{AD}} \times y_{\overrightarrow{DC}} = \ldots = 0$ donc $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$ d'où (AD) ⊥ (DC).

Lorsque l'on doit démontrer que l'on a un trapèze rectangle, il suffit de démontrer qu'il y a deux angles droits (il est inutile de démontrer qu'il y a deux côtés parallèles puisque cela découle des deux angles droits).

On en déduit que ABCD est un trapèze rectangle en A et D.

Chapitre sur les trapèzes :
Définition.
Trapèze croisé ; non-croisé
Trapèzes particuliers : trapèze rectangle, trapèze isocèle.
Caractérisation d'un trapèze rectangle.
Propriété d'un trapèze isocèle (axe de symétrie).
Aire d'un trapèze.

Autre façon :

Démontrons que (AB) // (CD).

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}\frac{3}{2}\\3\end{vmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{vmatrix}5\\-\frac{5}{2}\end{vmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}-\frac{7}{2}\\-7\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{7}{2}\\3 & -7\end{vmatrix}=\frac{3}{2}\times(-7)-3\times\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{21}{2}-\left(-\frac{21}{2}\right)=0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires d'où (AB) // (CD).

Par suite, ABCD est un trapèze.

Démontrons que (AB) $\perp$ (AD).

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=x_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{AD}}+y_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{AD}}=\frac{3}{2}\times5+3\times\left(-\frac{5}{2}\right)=0$ donc (AB) $\perp$ (AD).

On en déduit que ABCD a un angle droit.

On peut donc dire que ABCD est un trapèze rectangle en A et D.

2°) **Calculons l'aire de ABCD.**

On applique la formule de l'aire d'un trapèze (convexe ou non croisé, c'est la même chose) :

$\mathcal{A}=\frac{(b+B)\times h}{2}$ où b est la longueur de la petite base, B est la longueur de la grande base et h la hauteur.

Ici : $\mathcal{A}_{ABCD}=\frac{(AB+DC)\times AD}{2}$.

On calcule les longueurs AB, DC et AD (ce sont les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ dont on a calculé les coordonnées à la question 1°).

$AB^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2=\frac{9}{4}+9=\frac{5\times9}{4}$ donc $AB=\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

$AD^2=5^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2=25+\frac{25}{4}=\frac{125}{4}$ donc $AD=\frac{5}{2}\sqrt{5}$.

$DC^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2+7^2=\frac{49}{4}+49=\frac{245}{4}$ donc $DC=\frac{7}{2}\sqrt{5}$.

$$\mathcal{A}_{ABCD}=\frac{\left(\frac{7\sqrt{5}}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)\times\frac{5\sqrt{5}}{2}}{2}=\frac{5\sqrt{5}\times\frac{5\sqrt{5}}{2}}{2}=\frac{125}{4}\text{ u.a.}$$

(u.a. : unité d'aire c'est-à-dire aire du carré construit sur les vecteurs de base)

Complément : formule de Pick (ferait une belle bulle de rêve)

$\boxed{5}$

$\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=13$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{82}$, $\|\vec{u}-\vec{v}\|=3\sqrt{34}$

Solution détaillée :

$\vec{u}(4\,;\,-3)$; $\vec{v}(-5\,;\,12)$

Calculons $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

$\|\vec{u}\|^2=\left(x_{\vec{u}}\right)^2+\left(y_{\vec{u}}\right)^2=4^2+(-3)^2=16+9=25$ donc $\|\vec{u}\|=5$.

$\|\vec{v}\|^2==\left(x_{\vec{v}}\right)^2+\left(y_{\vec{v}}\right)^2=(-5)^2+12^2=25+144=169$ donc $\|\vec{v}\|=13$

$\vec{u}+\vec{v}\begin{vmatrix}4+(-5)=-1\\-3+12=9\end{vmatrix}$

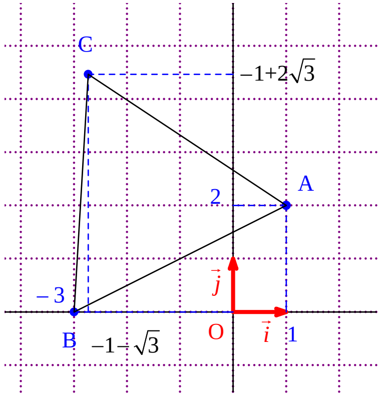
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(-1)^2+9^2=82$ donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{82}$

$\vec{u}-\vec{v}\begin{vmatrix}4-(-5)=9\\-3-12=-15\end{vmatrix}$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=9^2+(-15)^2=81+225=306$ donc $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{306}=3\sqrt{34}$

6 On peut faire une figure mais ce n'est pas forcément utile.

A(1 ; 2)   B(– 3 ; 0)   C$\left(-1-\sqrt{3}\ ;\ 1+2\sqrt{3}\right)$



On prend le centimètre ou un gros « carreau » pour unité graphique.

• Calculons AB, BC et AC.

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}-3-1=-4\\0-2=-2\end{array}\right.$; $\overrightarrow{BC}\left|\begin{array}{l}\left(-1-\sqrt{3}\right)+3=2-\sqrt{3}\\\left(1+2\sqrt{3}\right)-0=1+2\sqrt{3}\end{array}\right.$; $\overrightarrow{CA}\left|\begin{array}{l}-1-\sqrt{3}-1=-2-\sqrt{3}\\-1+2\sqrt{3}-2=-1+2\sqrt{3}\end{array}\right.$

On calcule leurs normes au carré (évite d'avoir à passer par des racines carrées).

$$AB^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=(-4)^2+(-2)^2=16+4=20$$

$$BC^2=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+2\sqrt{3}\right)^2=4\cancel{-4\sqrt{3}}+3+1+\cancel{4\sqrt{3}}+12=20$$

$$CA^2=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2=\left(-2-\sqrt{3}\right)^2+\left(-1+2\sqrt{3}\right)^2=4\cancel{+4\sqrt{3}}+3+1-\cancel{4\sqrt{3}}+12=20$$

On en déduit que AB = BC = CA = $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ (1).

• Déduisons-en la nature du triangle ABC.

D'après (1), ABC est un triangle équilatéral.

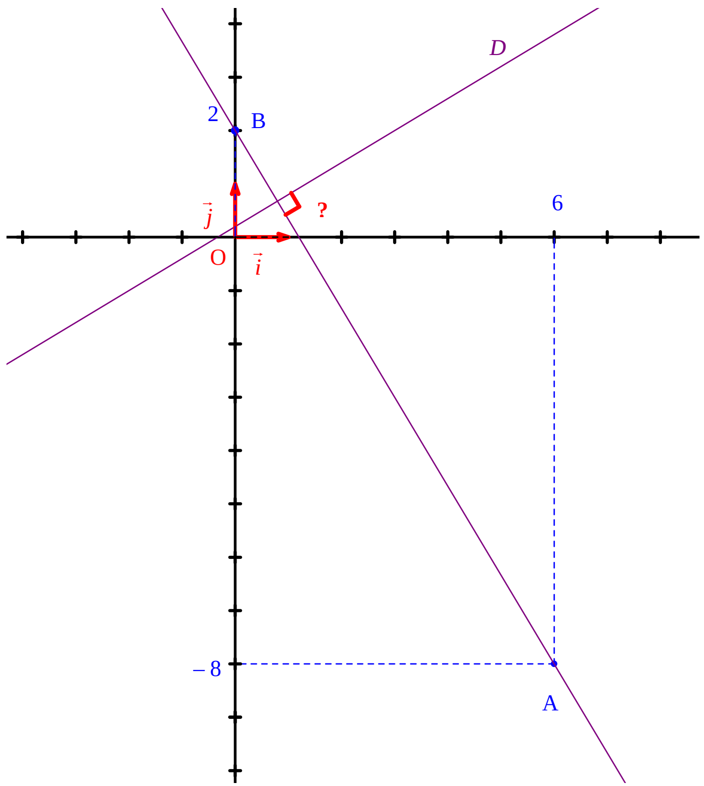
7

D : $3x-5y+1=0$
A(6 ; – 8)
B(0 ; 2)

Faire une figure avec les points A et B ainsi que la droite D (on met l'équation cartésienne sous forme d'équation réduite $y=\dfrac{3x+1}{5}$; la droite D passe par les points de coordonnées (– 2 ; – 1) et (3 ; 2)).

Tracer un représentant de $\vec{u}$ (permet de visualiser un vecteur normal à D).

N.B. : on peut aussi utiliser un vecteur directeur de D.



Démontrons que $D \perp$ (AB).

Attention : il n'est pas du tout utile de chercher une équation de la droite (AB).

1ère méthode :

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}(-6;10)$

On sait que le vecteur $\vec{u}(3;-5)$ est un vecteur normal à D.

On observe que $\overrightarrow{AB} = -2\vec{u}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

On en déduit que $D \perp$ (AB).

2^e^ méthode :

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}(-6;10)$

On sait que le vecteur $\vec{v}$(5 ; 3) est un vecteur directeur de D.

On calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = (-6) \times 5 + 10 \times 3$

$= -30 + 30$

$= 0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Par conséquent, $D \perp$ (AB).

$\boxed{8}$ 1°) $m = 2$ 2°) $m = \dfrac{1}{9}$

Solution détaillée :

$D_m : (m+1)x - (3m-1)y + m - 4 = 0$

A(6 ; – 8)

B(0 ; 2)

Les droites D_m constituent une **famille de droites dépendant d'un paramètre** (m est le **paramètre**).

On sait que le vecteur $\vec{u}(3m-1; m+1)$ est un vecteur directeur de D_m et que le vecteur $\vec{v}(m+1; 1-3m)$ est un vecteur normal à D_m.

$\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A = 0 - 6 = -6 \\ y_B - y_A = 2 + 8 = 10 \end{array} \right.$

Attention : une grosse perte de temps consisterait à chercher une équation de (AB).

1°) **Déterminons m tel que $D_m \perp$ (AB).**

$D_m \perp (AB) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow x_{\vec{u}} \times x_{\overrightarrow{AB}} + y_{\vec{u}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = 0$

$\Leftrightarrow (3m-1) \times (-6) + (m+1) \times 10 = 0$

$\Leftrightarrow -18m + 6 + +10m + 10 = 0$

$\Leftrightarrow -8m + 16 = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$

2°) **Déterminons m tel que D_m // (AB).**

D_m // (AB) $\Leftrightarrow \vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow x_{\vec{v}} \times x_{\overrightarrow{AB}} + y_{\vec{v}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = 0$

$\Leftrightarrow (m+1) \times (-6) + (1-3m) \times 10 = 0$

$\Leftrightarrow -6m - 6 + 10 - 30m = 0$

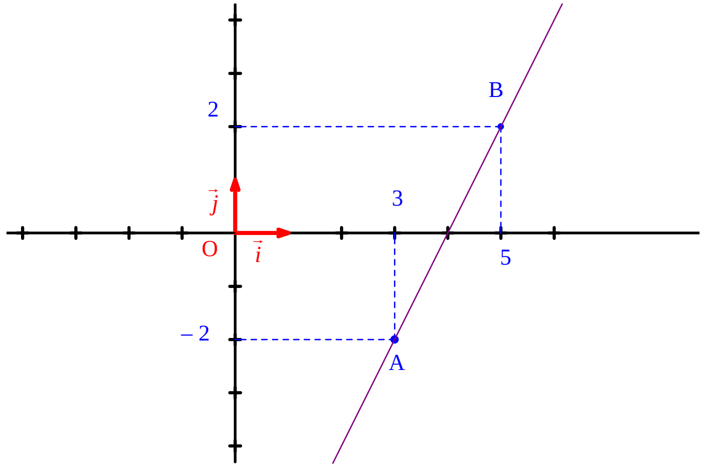
$\Leftrightarrow -36m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{-4}{-36}$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{1}{9}$

$\boxed{9}$ A(3 ; – 2) B(5 ; 2)

Faire une figure.



Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB).

Soit M(x ; y) un point quelconque du plan.

$\overrightarrow{AM} \left| \begin{array}{l} x-3 \\ y+2 \end{array} \right.$ $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 4 \end{array} \right.$

$M \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

si et seulement si $4(x-3) - 2(y+2) = 0$

si et seulement si $2(x-3) - (y+2) = 0$

si et seulement si $2x - y - 8 = 0$

Une équation cartésienne de (AB) s'écrit : $2x - y - 8 = 0$.

Autre méthode :

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}2\\4\end{array}\right.$ est un vecteur directeur de (AB) donc (AB) admet une équation cartésienne de la forme $4x - 2y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

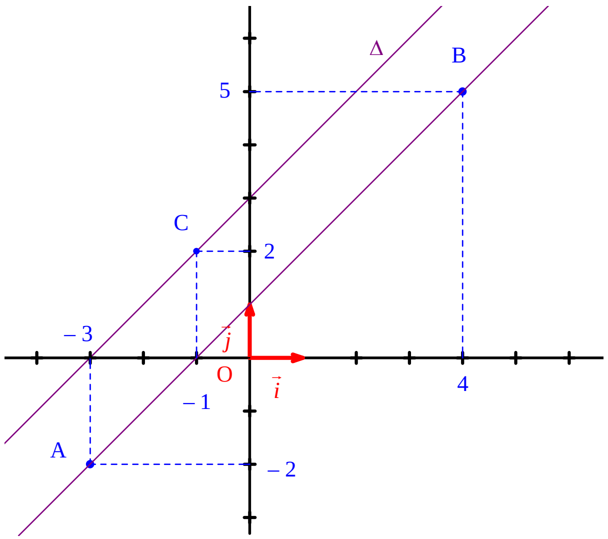
Or A $\in$ (AB) donc $4x_A - 2y_A + c = 0$ d'où c = – 16.

(AB) admet pour équation cartésienne $4x - 2y - 16 = 0$.
En simplifiant par 2, on obtient $2x - y - 8 = 0$.

N.B. : Il faut simplifier l'équation cartésienne que l'on obtient quand on peut.

$\boxed{\textbf{10}}$ A(– 3 ; – 2) B(4 ; 5) C(– 1 ; 2)

Déterminons une équation cartésienne de la droite Δ passant par C et parallèle à (AB).



Soit M(x ; y) un point quelconque du plan. « On instaure un point M » (Thomas Delamarre le 15 avril 2013)

$\overrightarrow{CM}\left|\begin{array}{l}x+1\\y-2\end{array}\right.$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}7\\7\end{array}\right.$

M $\in$ Δ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires (colinéarité)

$\Leftrightarrow 7(x+1) - 7(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow 7x + 7 - 7y + 14 = 0$

$\Leftrightarrow 7x - 7y + 21 = 0$

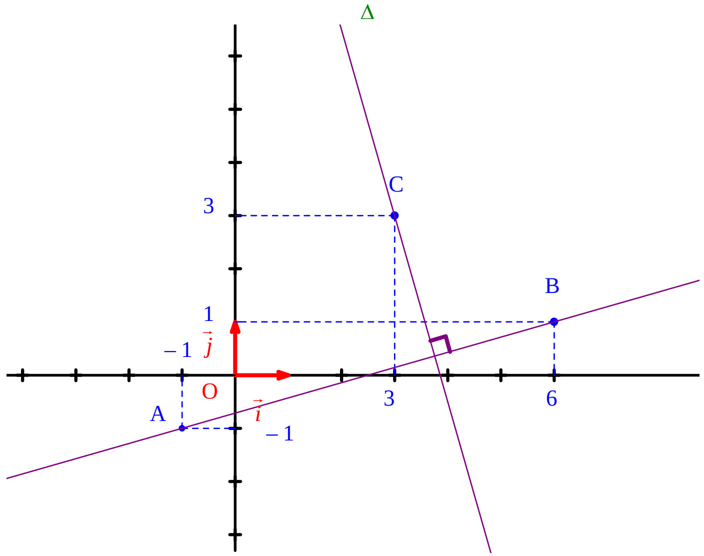
$\Leftrightarrow x - y + 3 = 0$

Une équation cartésienne de Δ s'écrit $x - y + 3 = 0$.

$\boxed{\textbf{11}}$ A(– 1 ; – 1) B(6 ; 1) C(3 ; 3)

Déterminons une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par C.

Faire une figure en plaçant les trois points A, B, C, la droite (AB) et la droite Δ.



On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}(7\,;2)$

1[ère] **méthode :**

Soit M(x, y) un point du plan.

$\overrightarrow{CM}\left|\begin{array}{l}x-3\\y-3\end{array}\right.$

M $\in$ Δ $\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow 7(x-3) + 2(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow 7x + 2y - 27 = 0$

2[e] méthode :

Comme Δ ⊥ (AB), on peut dire que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à Δ.
Donc Δ admet une équation cartésienne de la forme $7x+2y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

Or C ∈ Δ donc $7x_C+2y_C+c=0$ d'où $c=-27$.

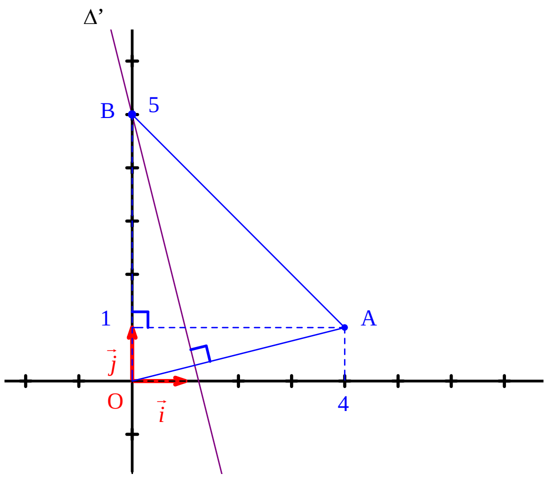
Δ a pour équation cartésienne $7x+2y-27=0$.

Conseil : surtout ne pas chercher une équation de la droite (AB) (car c'est inutile).

$\boxed{\textbf{12}}$

A(4 ; 1) B(0 ; 5)

$\left.\begin{array}{l}\Delta : \text{hauteur issue de A}\\ \Delta' : \text{hauteur issue de B}\end{array}\right\}$ dans OAB



1°)

• Déterminons l'équation réduite de Δ.

Δ est la hauteur la hauteur issue de A dans le triangle OAB.
Donc Δ est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (OB).
Or B ∈ (O*y*) donc la droite (OB) est confondue avec (O*y*).

Par suite, Δ ⊥ (O*y*).

Or (O*y*) ⊥ (O*x*) car le repère est orthonormé d'où Δ // (O*x*).

Comme A ∈ Δ, on en déduit que Δ a pour équation $y=1$.

• Déterminons une équation cartésienne de Δ'.

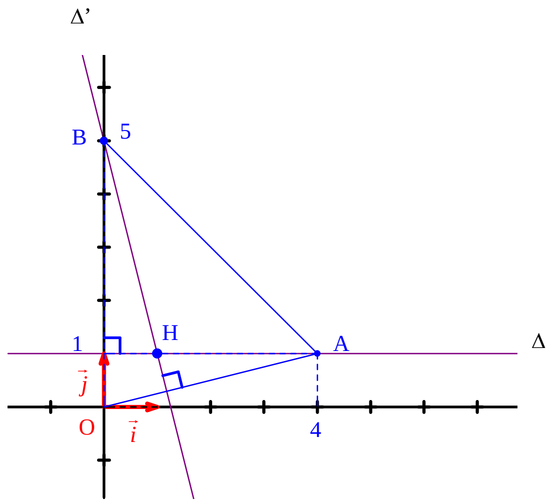
Soit M(*x*, *y*) un point du plan.

$\overrightarrow{BM}\left|\begin{array}{l}x\\ y-5\end{array}\right.$

$$\begin{aligned}M\in\Delta &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{OA}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\bullet\overrightarrow{OA}=0\\ &\Leftrightarrow x\times 4+(y-5)\times 1=0\\ &\Leftrightarrow 4x+y-5=0\end{aligned}$$

Δ' : $4x+y-5=0$

2°) **Déterminons les coordonnées du point H, orthocentre du triangle AOB.**



H est l'orthocentre du triangle OAB donc H est le point de concours des trois hauteurs du triangle OAB.
Par conséquent H est le point d'intersection de Δ et Δ'.

Les coordonnées de H sont solutions du système (I) $\begin{cases}y=1\\ -4x-y+5=0\end{cases}$.

(I) $\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$

$\text{H}(1\,;1)$

Les numéros $\boxed{13}$ à $\boxed{19}$ sont proposés dans une version très détaillée à la fin.

$\boxed{13}$ 1°) $\mathcal{C}$: $x^2+y^2-2x+6y+6=0$
2°) On commence par calculer la distance OA.
$\mathcal{C}$: $x^2+y^2+2x-2y=0$
3°) On commence par calculer la distance AB.
$\mathcal{C}$: $x^2+y^2+2x-2y-15=0$
4°) $\mathcal{C}$ est tangent à l'axe des ordonnées au point H(0 ; 2).
Le point H est le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées.
Le rayon du cercle est égal à HA = 3 (on peut donner cette distance directement sans faire aucun calcul).
$\mathcal{C}$: $x^2+y^2-6x-4y+4=0$
5°) Le cercle $\mathcal{C}$ a pour rayon 3.
$\mathcal{C}$: $x^2+y^2+4x+6y+4=0$
6°) On utilise la formule donnant une équation de cercle pour un diamètre.
$\mathcal{C}$: $x^2+y^2-3x-y=0$

$\boxed{14}$ L'ensemble E_1 est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}\ ;\ 2\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$; $E_2=\varnothing$; $E_3=\{\ \Omega\ \}$ avec Ω (1 ; 1).

$\boxed{15}$ 1°) Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre Ω (1 ; 1) et pour rayon $\sqrt{10}$.
La construction d'un segment de longueur $\sqrt{10}$ se fait aisément grâce au théorème de Pythagore car $10=3^2+1^2$ ($\sqrt{10}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs 3 et 1).
2°) $\mathrm{A}(-2\ ;\ 0)$; B(4 ; 0) ; $\mathrm{C}(0\ ;\ -2)$; D(0 ; 4)

$\boxed{16}$ 2°) $\mathcal{C}\cap D=\{\mathrm{A}\ ;\ \mathrm{B}\}$ avec $\mathrm{A}(-1\ ;\ 2)$ et B(2 ; 5)

$\boxed{17}$ 1°) $x^2+y^2-6x-4y=0$; 2°) $2x-3y+13=0$

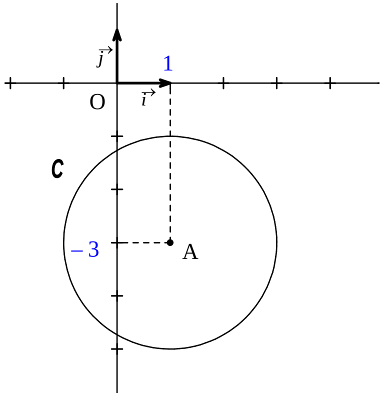
$\boxed{18}$ Étude d'une famille de courbes dépendant d'un paramètre.
Mettre l'équation sous forme canonique.

Solutions détaillées

$\boxed{13}$ Équations cartésiennes de cercles

1°) $\mathcal{C}$: cercle de centre $\mathrm{A}(1\ ;\ -3)$ et de rayon 2.

$\mathcal{C}$: cercle $\left|\begin{array}{l}\text{de centre } \mathrm{A}(1\,;-3)\\ \text{de rayon } 2\end{array}\right.$



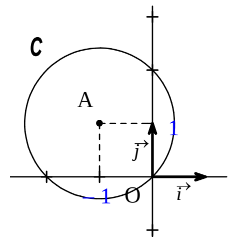
Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ soit $x^2+y^2-2x+6y+6=0$.

2°) $\mathcal{C}$: cercle de centre $\mathrm{A}(-1\ ;\ 1)$ passant par O.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\left|\begin{array}{l}-1\\ 1\end{array}\right.$ donc $\mathrm{OA}^2=(-1)^2+1^2=2$

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $(x+1)^2+(y-1)^2=2$.
On développe cette équation.

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ s'écrit $x^2+y^2+2x-2y=0$.

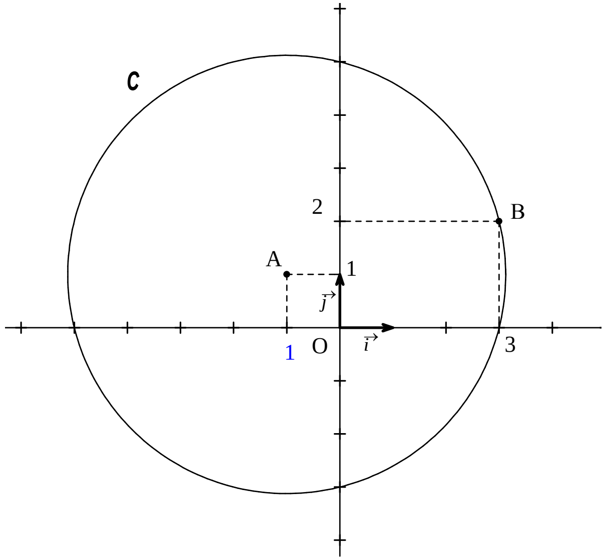


3°) $\mathcal{C}$: cercle de centre $A(-1\ ;\ 1)$ et passant par le point B(3 ; 2).

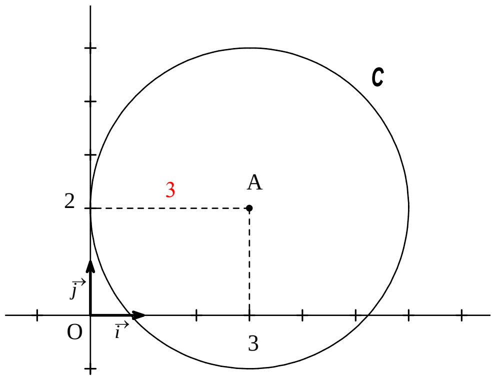
$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}4\\1\end{vmatrix}$ donc $AB^2=4^2+1^2=17$

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $(x+1)^2+(y-1)^2=17$.
On développe cette équation.

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ s'écrit $x^2+y^2+2x-2y-15=0$.



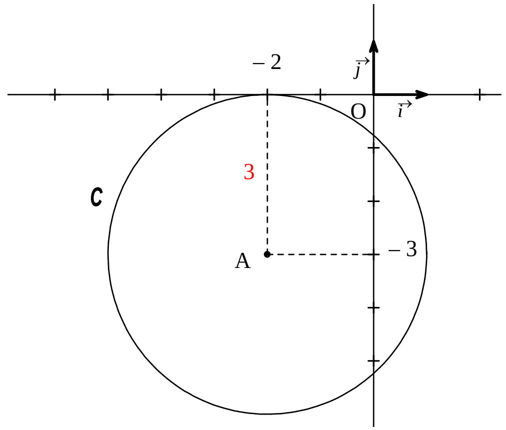
4°) $\mathcal{C}$: cercle de centre $A(3\ ;\ 2)$ et tangent à l'axe des ordonnées.



$\mathcal{C}$ est tangent à l'axe des ordonnées au point H(0 ; 2).
Le point H est le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées.
Le rayon du cercle est égal à HA = 3 (on peut donner cette distance directement sans faire aucun calcul).

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $(x-3)^2+(y-2)^2=3^2$ soit $x^2+y^2-6x-4y+4=0$.

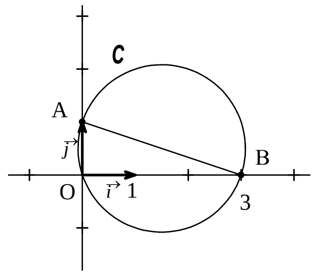
5°) $\mathcal{C}$: cercle de centre $A(-2\ ;\ -3)$ et tangent à l'axe des abscisses.



Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est égal à 3.

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $(x+2)^2+(y+3)^2=3^2$ soit $x^2+y^2+4x+6y+4=0$.

6°) $\mathcal{C}$: cercle de diamètre [AB] avec A(0 ; 1) et B(3 ; 0).



On utilise la formule donnant une équation de cercle pour un diamètre.

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $(x-0)(x-3)+(y-1)(y-0)=0$ soit $x^2+y^2-3x-y=0$.

Autre rédaction possible :

Soit M(x ; y) un point du plan.

M $\in$ **C** $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow (x-0)(x-3)+(y-1)(y-0)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-3x-y=0$

$\boxed{14}$ Reconnaissance d'ensembles définis par une équation

$\boxed{E_1 : x^2+y^2-3x-4y=-4}$

L'équation $x^2+y^2-3x-4y=-4$ est successivement équivalente à :

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+(y-2)^2-4=-4$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{9}{4}$

Donc l'ensemble E_1 est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}\ ;\ 2\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

$\boxed{E_2 : x^2+y^2-2x-4y+7=0}$

L'équation $x^2+y^2-2x-4y+7=0$ est successivement équivalente à :

$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4+7=0$

$(x-1)^2+(y-2)^2=-2$

Donc <u>l'ensemble E_2 est l'ensemble vide</u>.

$E_2=\varnothing$

$\boxed{E_3 : x^2+y^2-2x-2y=-2}$

L'équation $x^2+y^2-2x-2y=-2$ est successivement équivalente à :

$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1=-2$

$(x-1)^2+(y-1)^2=0$

Donc <u>l'ensemble E_3 est le singleton $\{\Omega\}$ avec Ω (1 ; 1)</u>.

$E_3=\{\Omega\}$

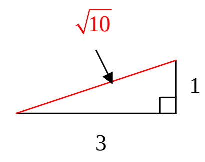
$\boxed{15}$ **C** : $x^2+y^2-2x-2y-8=0$

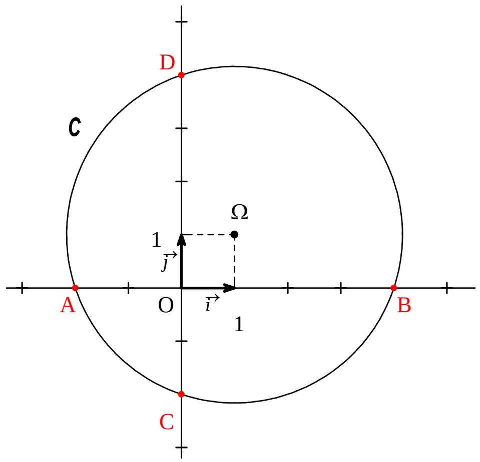
1°) Construisons le cercle **C**.

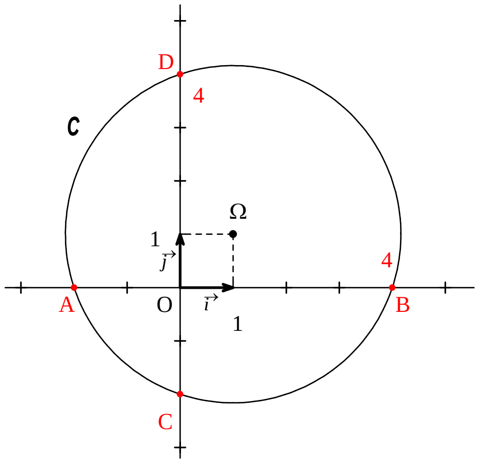
L'équation $x^2+y^2-2x-2y-8=0$ est équivalente à $(x-1)^2+(y-1)^2=10$.

On en déduit que **C** est le cercle de centre Ω (1 ; 1) et de rayon $\sqrt{10}$.

La construction d'un segment de longueur $\sqrt{10}$ se fait aisément grâce au théorème de Pythagore car $10=3^2+1^2$ ($\sqrt{10}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs 3 et 1).







2°) Coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes de coordonnées.

• Déterminons les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses sont solutions de l'équation $x^2-2x-8=0$.

Les racines de cette équation sont – 2 (racine évidente) et 4 (obtenu par produit).
On en déduit que $\mathcal{C} \cap (Ox) = \{ A ; B \}$ avec $A(-2 ; 0)$ et B(4 ; 0).

• Déterminons les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des ordonnées.

Les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des ordonnées sont solutions de l'équation $y^2-2y-8=0$.

On retrouve la même équation que lorsque l'on a déterminé les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
On en déduit que $\mathcal{C} \cap (Oy) = \{ C ; D \}$ avec C(0 ; – 2) et D(0 ; 4).

16

$\mathcal{C}$: $x^2+y^2-6x-2y-7=0$

$D : x-y+3=0$

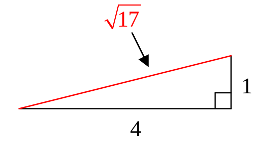
1°) **Construisons le cercle $\mathcal{C}$.**

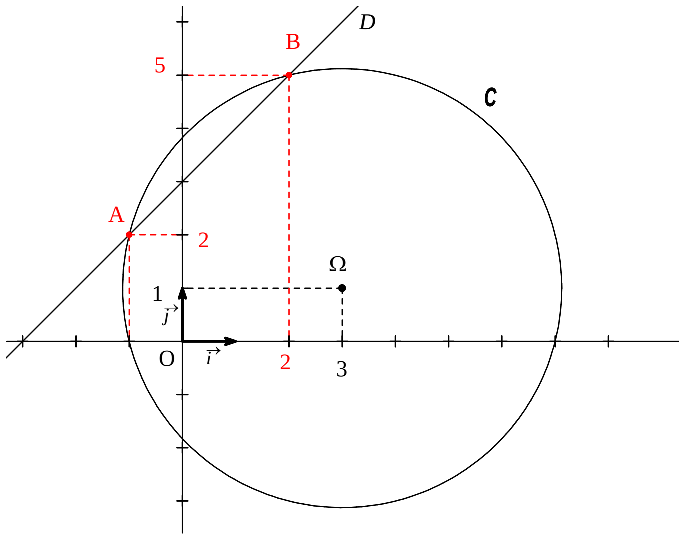
L'équation cartésienne de $\mathcal{C}$ donnée dans l'énoncé s'écrit aussi $(x-3)^2+(y-1)^2=17$.
On en déduit que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω (3 ; 1) et de rayon $\sqrt{17}$.

La construction d'un segment de longueur $\sqrt{17}$ se fait aisément grâce au théorème de Pythagore car $17=4^2+1^2$ ($\sqrt{17}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 4 et 1).

$D : y = x + 3$

x	0	4
y	3	7





2°) **Déterminons les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.**

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont solutions de l'équation $(x-3)^2+(x+3-1)^2=17$ (1).

L'équation (1) est successivement équivalente à
$(x-3)^2+(x+2)^2=17$
$2x^2-2x+13=17$
$2x^2-2x-4=0$
$x^2-x-2=0$

Les solutions de cette équation sont – 1 (racine évidente) et 2 (obtenue par produit).

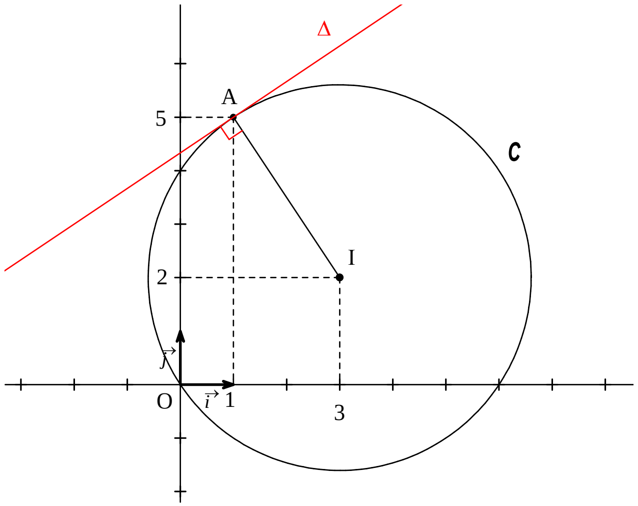
Conclusion :

$\mathcal{C} \cap D = \{ A ; B\}$ avec A(– 1 ; 2) et B(2 ; 5)

On calcule les ordonnées des points A et B grâce à l'équation réduite de la droite *D*.

$\boxed{17}$ I(3 ; 2) A(1 ; 5)

Figure :



1°) Déterminons une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre I passant par A.

$\overrightarrow{IA}\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ donc $IA^2=(-2)^2+3^2=13$

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre I passant par A a pour équation $(x-3)^2+(y-2)^2=13$.
On développe cette équation.

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ s'écrit $x^2+y^2-6x-4y=0$.

2°) Déterminons une équation cartésienne de la droite Δ tangente à $\mathcal{C}$ en A.

On note Δ la tangente à $\mathcal{C}$ en A (perpendiculaire au rayon [IA] passant par A).
La droite Δ est la perpendiculaire à la droite (IA) passant par A.

$M(x\,;y)\in\Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{IA}\perp\overrightarrow{AM}$
si et seulement si $(x-1)\times(-2)+(y-5)\times 3=0$
si et seulement si $-2x+3y-13=0$
si et seulement si $2x-3y+13=0$

Δ a pour équation cartésienne $2x - 3y + 13 = 0$.

$\boxed{18}$ **Étude d'une famille de cercles dépendant d'un paramètre**

$\mathcal{C}_m :\ x^2+y^2+4x+2y+m=0\ \ (m\in\mathbb{R})$

Déterminons la nature de $\mathcal{C}_m$ suivant les valeurs de *m*.

m est un paramètre.

L'équation $x^2+y^2+4x+2y+m=0$ est successivement équivalente aux équations suivantes :
$(x+2)^2+(y+1)^2+m-4-1=0$
$(x+2)^2+(y+1)^2=5-m$

On effectue une **discussion** suivant les valeurs de *m* par rapport au signe de $5 - m$.

1er cas : $m<5$

Dans ce cas, $5 - m > 0$.
$\mathcal{C}_m$ est le cercle de centre Ω (– 2 ; – 1) et pour rayon $\sqrt{5-m}$.

2e cas : $m = 5$

$\mathcal{C}_5$ a pour équation $(x+2)^2+(y+1)^2=0$.
$\mathcal{C}_5$ est le singleton { Ω } avec Ω (– 2 ; – 1).

3e cas : $m > 5$

Dans ce cas, $5 - m < 0$.
$\mathcal{C}_m$ est l'ensemble vide.

$\boxed{19}$ $D : y = mx + 1$; D' : $y = -4mx + 3$

Déterminons *m* tel que $D\perp D'$.

Le coefficient directeur de *D* est égal à *m*.

Le coefficient directeur de D' est égal à $-4m$.

$D\perp D' \Leftrightarrow m\times(-4m)=-1$ (propriété du cours : caractérisation de l'orthogonalité de deux droites)

$\Leftrightarrow -4m^2=-1$

$\Leftrightarrow m^2=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$ ou $m=-\dfrac{1}{2}$

On obtient : $m=\dfrac{1}{2}$ ou $m=-\dfrac{1}{2}$.

Autre méthode : On peut aussi raisonner avec un vecteur directeur de chacune des deux droites.

$\boxed{20}$ Utilisation d'un repère auxiliaire orthonormé

ABCD : carré de côté a ($a \in \mathbb{R}_+^*$)

I : milieu de [AB]

J : milieu de [BC]

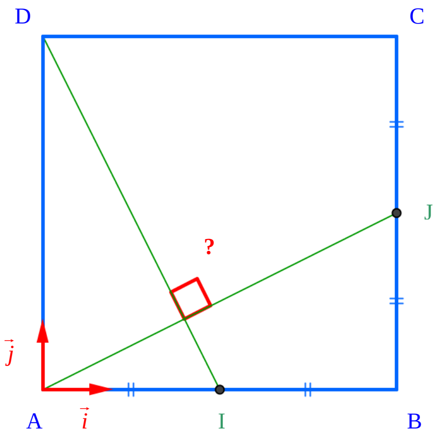
1°) Démontrons que le repère $\left(\mathrm{A}, \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$ est orthonormé.

On pose $\vec{i}=\dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{j}=\dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

On doit vérifier les deux conditions pour avoir un repère orthonormé.

La figure a été faite pour $a=4$ (du coup, $\vec{i}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{j}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$).

La valeur $a=4$ est donnée uniquement à titre d'exemple ; cette valeur n'est pas utilisée dans la suite.



Première condition : On démontre que les vecteurs du repère sont orthogonaux

ABCD est un carré donc (AB) $\perp$ (AD).

Par conséquent, $\vec{i} \perp \vec{j}$.

Deuxième condition : On démontre que les vecteurs du repère sont unitaires (ou normés)

$\|\vec{i}\|=\left\|\dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|=\left|\dfrac{1}{a}\right|\times\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|=\dfrac{1}{a}\times \mathrm{AB}=\dfrac{1}{a}\times a=1$

De même, on a : $\|\vec{j}\|=1$.

Ainsi, $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$

Conclusion :

Le repère $\left(\mathrm{A}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est **orthonormé**.

2°) Démontrons que : (AJ) $\perp$ (DI).

On utilise le repère précédent.
Comme ce repère est orthonormé, on peut utiliser l'expression analytique du produit scalaire.

Dans le repère $\left(\mathrm{A}, \vec{i}, \vec{j}\right)$,

$\mathrm{A}\left|\begin{array}{l}0\\0\end{array}\right.$ $\quad\mathrm{B}\left|\begin{array}{l}a\\0\end{array}\right.$ $\quad\mathrm{C}\left|\begin{array}{l}a\\a\end{array}\right.$ $\quad\mathrm{D}\left|\begin{array}{l}0\\a\end{array}\right.$ $\quad\mathrm{I}\left|\begin{array}{l}\dfrac{a}{2}\\0\end{array}\right.$ $\quad\mathrm{J}\left|\begin{array}{l}a\\\dfrac{a}{2}\end{array}\right.$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=a\times\left(\dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=a\vec{i}$ d'où les coordonnées de B.

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=a\times\left(\dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)=a\vec{j}$ d'où les coordonnées de D.

Pour les coordonnées de I et de J, on peut utiliser la formule des coordonnées d'un milieu ou utiliser l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{a}{2}\vec{i}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\left|\begin{array}{l}a\\\dfrac{a}{2}\end{array}\right.$ $\qquad\overrightarrow{\mathrm{DI}}\left|\begin{array}{l}\dfrac{a}{2}\\-a\end{array}\right.$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DI}}&=a\times\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\times a\\&=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\\&=0\end{aligned}$$

Le produit scalaire est nul donc $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DI}}$.

On en déduit que (AJ) $\perp$ (DI).