TS

Limites de suites (1)

La notion de limite de suite a été abordée en 1ère.
On s'est contenté d'une approche intuitive à partir d'exemples (approche numérique, graphique en utilisant notamment la calculatrice et le tableur). Une large place a été faite à l'observation.

On a alors mis en place les notations usuelles des limites de suites et le vocabulaire spécifique à l'étude du comportement asymptotique des suites (on a notamment parlé de limite finie, de limite infinies, de convergence et de divergence).

La notion de limite de fonction a été entrevue avec l'étude de la dérivée d'une fonction (définition du nombre dérivé d'une fonction comme limite en 0 du taux de variation). À cette occasion, on a d'ailleurs vu l'écriture symbolique d'une limite.

Le but du cours de cette année est de reprendre et de compléter l'étude des limites de suites.

La notion de limite de fonction sera étudiée ultérieurement.
Le lien entre limite de suite et limite de fonction sera précisé à cette occasion.

Avant de commencer, il est important de rappeler qu'une suite est définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$ (pour les suites définies à partir d'un certain indice).

Étudier la limite d'une suite, c'est étudier le comportement de ses termes lorsque l'indice tend vers $+\infty$.
(lorsque l'on étudie la limite d'une suite (u_n) cela signifie que l'on étudie le comportement des termes u_n de la suite lorsque l'indice tend vers $+\infty$, c'est-à-dire lorsque n prend des valeurs entières de plus en plus grandes).

Il est important de comprendre que l'indice n étant un entier, on ne peut pas le faire tendre vers autre chose que vers $+\infty$ (en particulier, on ne peut pas le faire tendre vers 0, car n ne peut pas s'approcher aussi près que l'on veut de 0).

I. Notion de limite finie (convergence)

1°) Exemple concret

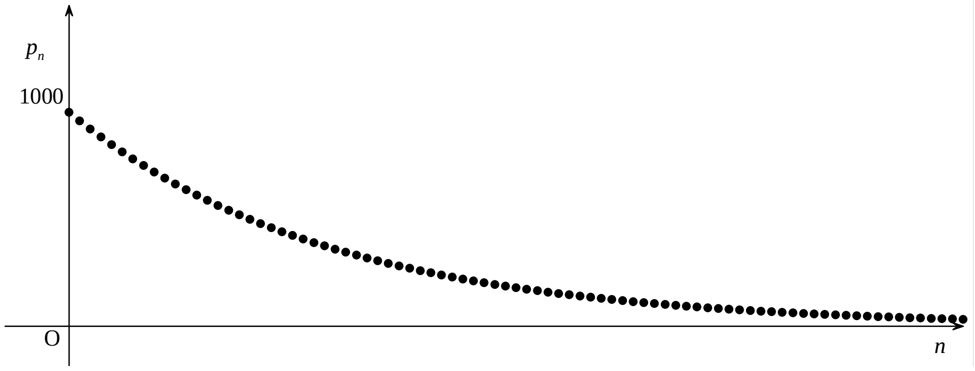
On étudie l'évolution d'une population animale.
Cette population diminue de 4 % par an.
Elle compte initialement 1 000 individus.

2°) Modélisation mathématique

On note p_n la population au bout de n années.

$p_0 = 1000$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = 0{,}96\, p_n$
Donc la suite (p_n) est une suite géométrique de premier terme $p_0 = 1000$ et de raison $q = 0{,}96$.

La représentation graphique de la suite donne le nuage de points ci-dessous.



Les points de la représentation graphique de la suite se rapprochent de l'axe des abscisses sans jamais le toucher (même si on peut avoir l'impression que les derniers points touchent la pointe de la flèche indiquant le sens positif de l'axe).

Les termes de la suite se rapprochent de 0 sans jamais être égaux à 0 (ils restent toujours strictement positifs).

On dit que 0 est la limite de la suite (p_n) ; cette valeur n'est jamais atteinte.

Concrètement, on a un phénomène d'extinction.

3°) Vocabulaire et écritures symboliques

- « p_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ».

$p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

- « La limite de p_n quand n tend vers $+\infty$ est égale à 0 ».

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$

- « La suite (p_n) **converge** vers 0 ».

II. Notion de limite infinie (divergence)

1°) Exemple concret

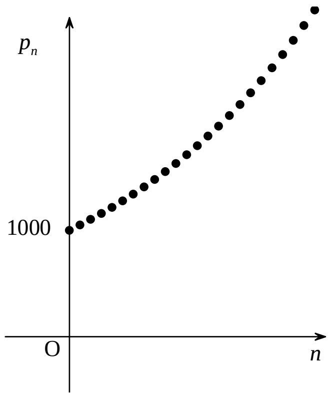
On étudie l'évolution d'une population animale.
Cette population augmente de 10 % par an.
Elle compte initialement 1000 individus.

2°) Modélisation mathématique

On note p_n la population au bout de n années.

$p_0 = 1000$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = 1{,}1\, p_n$

Donc la suite (p_n) est une suite géométrique de premier terme $p_0 = 1000$ et de raison $q = 1{,}1$.



Concrètement, on un phénomène d'expansion.

3°) Vocabulaire et écritures symboliques

- « p_n tend vers + ∞ quand n tend vers + ∞ ».

$p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

- « La limite de p_n quand n tend vers + ∞ est égale à + ∞ ».

$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$

- « La suite (p_n) **diverge** vers + ∞ ».

On peut dire que la suite (p_n) est divergente vers + ∞.

III. Premier bilan des notions et vocabulaire

1°) La notion de « tendre vers » ; la notion de limite

Dans les deux exemples précédents, on a dégagé de nouvelles notions :

- la notion de « tendre vers » ;

- la notion de limite.

La notion de « tendre vers » s'applique aussi bien pour l'indice (quand on dit que l' « on fait tendre » n vers + ∞ ») que pour le terme général.

2°) Quelques idées intuitives

(u_n) est une suite.

Écriture symbolique	Traduction intuitive
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \quad (l \in \mathbb{R})$	**Tous les termes s'accumulent autour de l lorsque $n \to +\infty$.**
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	**Tous les termes deviennent de plus en plus grands lorsque $n \to +\infty$.**
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	**Tous les termes deviennent de plus en plus petits lorsque $n \to +\infty$.**

3°) Vocabulaire

- Dans le premier cas, on dit que la suite (u_n) admet une **limite finie**.

- Dans les deux autres cas, on dit que la suite (u_n) admet une **limite infinie**.

4°) Convergence – divergence

Définition

- **On dit qu'une suite est convergente lorsqu'elle admet une limite finie.**

- **On dit qu'une suite est divergente lorsqu'elle n'est pas convergente c'est-à-dire lorsqu'elle n'admet pas une limite finie.**

IV. Exemples

Ces exemples pourront être justifiés plus tard.
Pour l'instant, on se contente de donner des résultats de manière intuitive.

1°) Exemple 1

$$u_n = \frac{1}{n}$$

a) Résultat de la limite

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

b) Justifications

On peut représenter graphiquement cette suite par un nuage de points pour voir la limite.
Les points de la représentation graphique de la suite s'approchent de plus en plus de l'axe des abscisses sans jamais le toucher. Cela correspond à la notion d'asymptote qui sera vue plus tard avec les fonctions.

On peut aussi remplacer *n* dans sa tête par des valeurs entières de plus en plus grandes.

c) Vocabulaire

La suite (u_n) est convergente (on dit que la suite (u_n) converge « vers » 0).

d) Remarques sur le comportement global

La suite (u_n) est strictement décroissante.
0 est un minorant de la suite.

Ces deux remarques sur le comportement global de la suite (u_n) ne nous intéressent pas dans ce chapitre.
Le lien entre limite de suite et majorant ou minorant sera explicité plus tard.
Le lien entre limite de suite et monotonie sera explicité plus tard.

2°) Exemple 2

$$u_n = n^2$$

a) Résultat de la limite

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

b) Vocabulaire

La suite (u_n) est divergente (on dit que la suite (u_n) diverge « vers » + ∞).

3°) Exemple 3

$$u_n = (-1)^n$$

a) Résultat de la limite

(u_n) n'a pas de limite

b) Justification

La représentation graphique fait apparaître un comportement oscillant (la suite est périodique de période 2).
La suite prend alternativement les valeurs 1 et – 1.

c) Vocabulaire

La suite (u_n) est divergente.

V. Quelques limites de référence (résultats à connaître)

Ces limites sont admises sans démonstrations dans ce chapitre, elles seront démontrées dans le chapitre suivant.

1°) Limites des suites $(\sqrt{n})$, (n), (n^2), (n^3) …

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} (n) = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} (n^2) = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} (n^3) = +\infty$$

2°) Limites des suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ …

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

3°) Limite de la suite $\left(q^n\right)$

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(q^n\right) = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(q^n\right) = 0$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(q^n\right) = 1$.
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite $\left(q^n\right)$ n'admet pas de limite.

VI. Règles d'opérations algébriques sur les limites

(admises sans démonstration)

Ces règles sont assez intuitives et ne nécessitent pas un gros effort de mémorisation.

a et b sont deux réels.

1°) Limite d'une somme

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	a	a	a	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	b	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + v_n\right) =$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

2°) Limite d'un produit

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	a	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	b	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n \times v_n\right) =$	$a \times b$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

3°) Limite d'un quotient

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	a	a	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$a>0$ ou $+\infty$	$a>0$ ou $+\infty$	$a<0$ ou $-\infty$	$a<0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$b\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$b>0$	$b<0$	$b>0$	$b<0$	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant positif	0 en restant négatif	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{a}{b}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

VII. Utilisation des règles

1°) Exemples de calculs de limites de suites (avec présentation des calculs)

Les règles permettent de déterminer par le calcul le résultat de la limite d'une suite dans de nombreux cas à partir des limites des suites de référence comme nous allons le voir dans les exemples précédents.

• Exemple 1

$u_n = n^2 - 1$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On sépare :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\right) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-1\right) = -1\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme (tableau 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• Exemple 2

$u_n = -3n^2$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3\right) = -3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\right) = +\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit (tableau 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2°) Calculs de limites

On retiendra que l'on peut déterminer par le calcul le résultat de la limite d'une somme, d'un quotient ou d'un produit en appliquant les règles données par les tableaux du paragraphe précédent.
Dans ce cas, on dit que l'on calcule la limite de la suite par somme, produit ou quotient.

On notera que l'on peut aussi s'aider d'un logiciel de calcul formel pour vérifier le résultat d'un calcul de limite de suite.

3°) Justification des limites des suites $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ à partir de celles de $\left(\sqrt{n}\right)$, $\left(n\right)$, $\left(n^2\right)$, $\left(n^3\right)$

Toutes les suites $\left(\sqrt{n}\right)$, $\left(n\right)$, $\left(n^2\right)$, $\left(n^3\right)$ … tendent vers $+\infty$ donc, par limite d'un quotient, les suites $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ … tendent vers 0.

On peut noter que les suites $\left(\sqrt{n}\right)$, (n), $\left(n^2\right)$, $\left(n^3\right)$ … tendent de plus en plus « vite » vers $+\infty$ et que les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ … convergent de plus en plus « vite » vers 0 (notion de « vitesse de convergence » et de « croissance comparée »).

VIII. Formes indéterminées

1°) Quatre cas de formes indéterminées (à connaître par cœur)

On écrit ces quatre cas symboliquement entre guillemets :

$$\text{« } \infty - \infty \text{ », « } 0 \times \infty \text{ », « } \frac{\infty}{\infty} \text{ », « } \frac{0}{0} \text{ ».}$$

Dans ces 4 cas, on ne sait pas déterminer la limite de la suite par les règles d'opérations algébriques.

Dans tous les autres cas, on sait trouver la limiter de la suite.

2°) Lever un cas d'indétermination

Il arrive que l'on rencontre un cas de forme indéterminée pour déterminer la limite d'une suite.

Dans ce cas, on essaie de « lever » l'indétermination. En général, on procède par réécriture.

On peut s'aider d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel pour avoir une idée de la limite.

3°) Le cas d'une FI du type « $0 \times \infty$ »

La règle « 0 fois n'importe quoi égale 0 » n'est valable que lorsque le « n'importe quoi » est un nombre ; elle ne s'applique pas lorsque le n'importe quoi est un infini (car ce n'est pas un nombre).

Tous les cas de figure sont possibles.
Voici trois exemples de cas de figures.

$n \times \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (car $n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$)

$n \times \frac{3}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$ (car $n \times \frac{3}{n} = 3$)

$n \times \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (car $n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$)

4°) Remarque

Quand on dit que l'on rencontre une « FI », on dit que l'on est en présence d'un cas d'indétermination de la limite et non pas qu'il n'y a pas de limite.
On veut dire par là que les règles d'opérations algébriques ne permettent pas de savoir s'il y une limite ni quelle est la « valeur » de cette limite.

Pour lever l'indétermination (c'est-à-dire pour savoir s'il y a une limite et trouver éventuellement cette limite), une technique très fréquemment employée consiste à transformer astucieusement l'écriture du terme général de la suite de manière à ne plus avoir de problème pour déterminer la limite (c'est-à-dire que l'on peut déterminer la limite en appliquant les règles d'opérations algébriques données dans le tableau) : il s'agit d'un principe de « réécriture » (cf. exercices).

Attention, pour la suite de terme général $(-1)^n$, il n'y a pas de forme indéterminée.
En effet, cette suite n'a pas de limite.