Phrases quantifiées

Les étapes « comprendre la nécessité de quantifier », « être capable d'expliciter les quantifications » et « être capable de rédiger avec des quantificateurs » sont des étapes différentes (la dernière étant un objectif à atteindre en $1^{\text{ère}}$ S).
Cette année, il faut prendre progressivement l'habitude de faire apparaître les quantifications dans les productions écrites quand la compréhension le demande.

1. Quantification d'une proposition

Les quantificateurs permettent de connaître le domaine de validité d'une propriété. Ils sont donc essentiels pour savoir dans quel cas une propriété peut s'appliquer.

Exemples

• On considère les trois affirmations suivantes :

« **Tout** parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle. »

« **Quel que soit** x, x^2 est positif ou nul. »

« **Tous** les ans, Noël est en décembre. »

Dans ces trois affirmations, on énonce une **propriété universelle**, vraie pour tous les parallélogrammes, pour tout nombre réel x, pour chaque année.

• On considère les trois affirmations suivantes :

« **Il existe** des parallélogrammes dont les diagonales sont de même longueur. »

« **Il existe** des réels x tels que $x^2 > 100$. »

« **Il existe** des années où il ne neige pas. »

Dans ces trois affirmations, on énonce une propriété vraie sur des exemples mais qui n'est pas universelle.

Les phrases quantifiées interviennent fréquemment dans les définitions (en analyse, fonction croissante ou décroissante, maximum ou minimum, suite croissante ou décroissante…).

2. « Il existe un », « Quel que soit », « Pour tout » : quantificateurs

• **« Pour tout », « quel que soit »**

On a vu au collège que quelles que soient les valeurs par lesquelles on remplace a et b, ($(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$.
On l'énonce ainsi : « Quels que soient a et b réels, $(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$ »
ou encore : « Pour tous a et b réels, $(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$ ».

• **« Il existe un ... »** signifie **« Il existe au moins un ... »**.

Par exemple :
« Il existe un nombre x tel que : $x^2 - 1 = 3$ » est vraie : si on prend $x = 2$, on a bien : $x^2 - 1 = 3$.
On aurait aussi pu prendre $x = -2$.

Vocabulaire :

« Un » a plusieurs significations : « un exactement », « au moins un », « un quelconque ».

3. Quantification explicite ; quantification implicite

ATTENTION ! Les quantificateurs sont essentiels dans une proposition mais ils sont souvent **implicites** : il faut donc veiller à les repérer.

• « **Un** parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle. »
Le quantificateur implicite est **« tout »**.

• « **Un** parallélogramme peut avoir des diagonales de même longueur. »
Le quantificateur implicite est **« il existe »**.

Attention ! Très souvent « quel que soit » ou « pour tout » sont implicites.
Par exemple, « un rectangle a ses diagonales de même longueur » signifie que
« quel que soit le rectangle que l'on considère, il a ses diagonales de la même longueur ».

Ici « un » signifie « un quelconque », « pour tout ».

4. Raisonnement par exemple(s) et contre-exemple

Quelques principes :

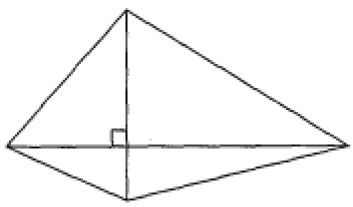
• Pour démontrer qu'une proposition du type « il existe un ... » est vraie, il suffit d'en trouver un : produire un exemple suffit !

• Pour démontrer qu'une proposition du type « pour tout ... » est vraie, on doit envisager tous les cas ; mais s'ils sont en nombre infini, ce n'est plus possible. Des exemples ne suffisent pas.

• Pour démontrer qu'une proposition du type « pour tout … » est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple.

Exemples :

• Démontrer que la proposition « il existe un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires » est vraie.
Il suffit d'en construire un, comme ci-dessous.



• Démontrer que la proposition « tout nombre multiple de 6 est aussi multiple de 2 » est vraie.

Il faudrait tester tous les multiples de 6, mais il y en a une infinité ! Ce n'est donc pas possible. Il faut faire une démonstration dans le cas général.

• Démontrer que la proposition « pour tout réel x, $(x+1)^2 = x^2 + 1$ » est fausse.
Il suffit de donner un contre-exemple :
pour $x = 2$, $(x+1)^2 = 9$ et $x^2 + 1 = 5$ donc $(x+1)^2 \neq x^2 + 1$.

Retenir :

Pour démontrer qu'une phrase quantifiée par un « pour tout » est vraie, on ne doit pas utiliser d'exemple.

Grave erreur de logique

Démontrer qu'un énoncé universel portant sur un réel x est vrai en prenant une valeur particulière de x.

Autrement dit, des valeurs particulières de x ne suffisent pas à démontrer qu'une proposition est universellement vraie.
On peut éventuellement se servir de valeurs particulières pour établir une conjecture mais pas pour démontrer la conjecture.

Lorsqu'un énoncé est vrai pour tout réel x, on peut « spécialiser » le x suivant les besoins (c'est-à-dire que l'on peut donner à x des valeurs particulières).

5. Négation d'une proposition quantifiée

Les deux quantificateurs **« tout »** et **« il existe »** sont souvent liés lorsqu'il s'agit d'énoncer le contraire d'une proposition.

• La négation de la proposition « **Toutes** les fenêtres sont fermées » est la proposition « **Il existe** une fenêtre (au moins) d'ouverte ».

• Le contraire de la proposition « **Tous** les carrés sont des losanges » est la proposition « **Il existe** des losanges qui ne sont pas carrés ».

Remarque

Les quantificateurs sont intéressants pour donner un contre-exemple.
Par exemple, la proposition « tout parallélogramme a ses diagonales de longueurs différentes » est fausse car il existe des parallélogrammes dont les diagonales ont même longueur.

6. Quantificateurs

• Le quantificateur universel : $\forall$ (« quel que soit » ou « pour tout »)

Ce symbole représente un A à l'envers.
Il est dû au mathématicien David Hilbert (début du XX^{e} siècle).
Ce symbole doit être lu « quel que soit ».
Il semble cependant que ces dernières années il soit lu « pour tout », ce qui est légèrement différent du sens initial de « quel que soit ».

• Le quantificateur existentiel : $\exists$ (« il existe au moins un »)

Ce symbole représente un E retourné.

• Exemples d'utilisation :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 > 0$

$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 > x$ (on lit « Il existe un réel x tel que $x^2 > x$ »)

• Pour préciser l'existence et l'unicité, on rajoute un point d'exclamation après le quantificateur $\exists$ **:**

$\exists$! (« il existe un unique »)

Exemple : $\exists !\, x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^2 = 4$ (« il existe un unique réel x positif ou nul tel que $x^2 = 4$)

Remarque :

Le point d'exclamation sert aussi à désigner la factorielle d'un entier.

Le quantificateur universel sera utilisé constamment cette année.
Le quantificateur existentiel est moins utilisé au lycée.

7. Utilisation du quantificateur universel

La position d'un quantificateur $\forall$ dans un texte mathématique est codifiée de la manière suivante.

a. Le quantificateur doit toujours être placé avant l'égalité ou l'inégalité dont il dépend.

On ne doit pas placer le quantificateur $\forall$ après une égalité ou une inégalité.

Exemple à ne pas suivre : « $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ »)

b. On ne doit pas utiliser le quantificateur $\forall$ dans une phrase.

Exemples à ne pas suivre : « La propriété $P(x)$ est vraie $\forall x \in \mathbb{R}$. »

« $\forall n \in \mathbb{N}$ $n(n+1)$ est un nombre pair. »

c. On ne doit pas insérer de texte entre le quantificateur $\forall$ et l'égalité ou l'inégalité dont il dépend

Exemple à ne pas suivre : « $\forall x \in \mathbb{R}$ $\underbrace{\text{on a :}}_{\text{interdit}}$ $x^2-1=(x+1)(x-1)$ »

8. Négation de propositions quantifiées (avec un seul quantificateur)

f désigne un fonction définir sur un intervalle I.

La négation de la phrase « $\forall x \in \mathrm{I}$ $f(x) \geqslant 3$ » est « $\exists x \in \mathrm{I}$ $f(x) < 3$ ».

La négation de la phrase « $\exists x \in \mathrm{I}$ $f(x) = 1$ » est « $\forall x \in \mathrm{I}$ $f(x) \neq 1$ ».

9. Identité

Une **identité** est une égalité faisant intervenir des lettres qui est vraie quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.

Par exemple, l'égalité $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (connue sous le nom d'« identité remarquable ») est universellement vraie c'est-à-dire que quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les valeurs « retournées » par les deux expressions figurant de part et d'autre du signe « = » sont égales.

Il est important que ce caractère d'universalité soit mentionné (en faisant éventuellement appel aux quantificateurs).

Quantification en français :

« Pour tous réels a et b, on a $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ».

« Quels que soient les réels a et b, on a $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ».

Quantification à l'aide du symbole :

« $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\forall\, b \in \mathbb{R}$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ».

« $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ». ($\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble des couples de réels)

On peut utiliser deux quantificateurs ou un seul (c'est d'ailleurs la meilleure manière).

10. Phrases plus complexes avec deux quantificateurs

a. Exemples :

La proposition « $\forall\, a \in \mathbb{R}_+ \quad \exists\, b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = a$ » (« pour tout réel *a* positif ou nul, il existe un réel *b* tel que $b^2 = a$ ») est vraie.

La proposition « $\forall\, a \in \mathbb{R}_+ \quad \exists\,!\, b \in \mathbb{R}_+$ tel que $b^2 = a$ » (« pour tout réel *a* positif ou nul, il existe un unique réel *b* positif ou nul tel que $b^2 = a$ ») est vraie également.

Ces deux propositions font intervenir deux quantificateurs de nature différente.

b. À savoir :

Dans une phrase quantifiée,

- on peut permuter deux quantificateurs de même nature ;

- on ne peut pas permuter deux quantificateurs de nature différente (les quantificateurs « quelque soit » et « il existe » ne sont pas permutables).

11. Utilité d'un exemple pour détecter d'éventuelles erreurs

Le recours à un exemple est parfois utile.

Exemple : étudier le signe de $2 - x$ selon les valeurs de x.

On cherche la valeur de x qui annule $2 - x$.

$2 - x = 0$ équivaut à $x = 2$.

On cherche le signe de $2 - x$ pour $x < 2$.

On prend une « valeur test » (par exemple 0 qui est bien strictement inférieur à 0).

On peut alors dresser le tableau de signe de $x - 2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2 - x$		$+$	0	$-$	

Exercices

$\boxed{1}$ Quantificateurs

A est un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r.

Réécrire les phrases suivantes en utilisant « pour tout » ou « il existe » :

a. … M appartenant à $\mathcal{C}$, OM = OA.

b. … M appartenant à $\mathcal{C}$; AM = r.

c. … M appartenant à $\mathcal{C}$; (OM) $\perp$ (OA).

d. … M extérieur au cercle $\mathcal{C}$, OM = $2r$.

e. … M extérieur au cercle $\mathcal{C}$, OM > r.

$\boxed{2}$ Quantificateurs

x et y sont deux nombres réels. Ajouter « pour tous x et y » ou « il existe x et y » à ces propositions :

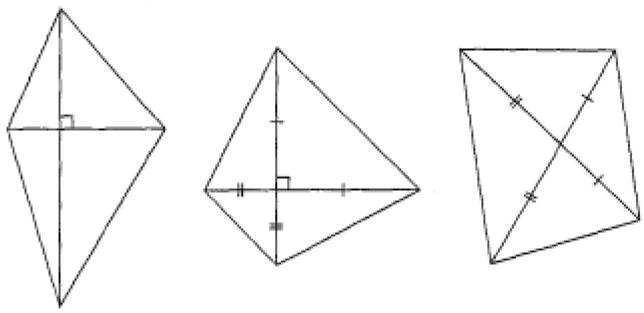
a. $xy = 3$ b. $x^2 + y^2 \geq 0$ c. $x + y > x$ d. $(xy)^2 = x^2y^2$

$\boxed{3}$ Contre-exemples

a. La proposition « si n est multiple de 6 et n est multiple de 8 alors n est multiple de 6×8 » est fausse.
Les nombres suivants en fournissent-ils un contre-exemple : 48 ; 24 ; 96 ; 16 ?

b. La proposition « pour tout x réel, si $x^2 > 4$ alors $x > 2$ » est fausse.
Les nombres suivants en fournissent-ils un contre-exemple : 2 ; 5 ; – 2 ; – 1 ; – 6 ?

c. La proposition « un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur est un carré » est fausse. Les figures suivantes en fournissent-elles un contre-exemple ?



$\boxed{4}$ Négation d'une phrase quantifiée

Dans chaque cas, étudier si la phrase B est la négation de la phrase A proposée.

① A : Tous les élèves de la classe apprennent l'anglais.
B : Aucun des élèves de la classe n'apprend l'anglais.

② A : Certains élèves du lycée sont internes.
B : Certains élèves du lycée ne sont pas internes.

③ A : Jean ne voyage jamais sans bagages.
B : Jean voyage toujours avec des bagages.

④ A : Les lycéens ont toujours cours le samedi.
B : Les lycéens n'ont jamais cours le samedi.

$\boxed{5}$ On donne le tableau d'une fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 5].

x	0		2		4		5
$f(x)$	-4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2

Recopier et compléter les phrases suivantes en utilisant soit « pour tout » soit « il existe un … tel que » de manière à obtenir des propositions vraies.

a. ……….. réel $x \in [0 ; 5]$ ……….. $f(x) > -4$.

b. ……….. réel $x \in [0 ; 5]$ ……….. $f(x) \leq 1$.

c. ……….. réel $x \in [0 ; 5]$ ……….. $f(x) = -3$.

d. ……….. réel $x \in [0 ; 5]$ ……….. $f(x) \leq 0$.

e. ……….. réel $x \in [0 ; 4]$ ……….. $f(x) \leq -1$.

f. ……….. réel $x \in [0 ; 4]$ ……….. $f(x) \geq -2$.

g. ……….. réel $x \in [0 ; 5]$ ……….. $f(x) = -1$.

h. ……….. réel $x \in [0 ; 5]$ ……….. $f(x) \geq -5$.

$\boxed{6}$ Démontrer que la proposition « Pour tous réels *a* et *b* positifs ou nuls $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ » est fausse.

$\boxed{7}$ On considère la proposition *P* : « Il existe deux réels dont la somme est égale au produit ».
Cette proposition est-elle vraie ou fausse ?

$\boxed{8}$ On considère les propositions suivantes :

« La somme de deux entiers pairs est un entier pair ».

« La somme de deux entiers impairs est un entier pair ».

« La somme d'un entier pair et d'un entier impair est un entier impair ».

Ces propositions sont vraies.

On note E l'ensemble des entiers pairs et F l'ensemble des entiers impairs.

Reformuler les propositions précédentes sous la forme de phrases quantifiées en utilisant les ensembles E et F.

$\boxed{9}$ **Quantificateur universel, existentiel**

Autour de l'égalité $x^3 = x$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Pour tout réel x, $x^3 = x$.
b) Il existe au moins un nombre réel x tel que $x^3 = x$.
c) Il existe un nombre réel x tel que $x^3 = x$.

$\boxed{10}$ Écrire la négation de la proposition suivante : « tous les murs de la pièce sont blancs ».

$\boxed{11}$ Relier chaque phrase 1, 2, 3 à la phrase A, B, C qui a la même signification.

f désigne une fonction.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.	A. Existe-t-il des nombres x pour lesquels $f(x)$ et $3x^2 + 1$ sont égaux ?
2. L'équation $f(x) = 3x^2 + 1$ a-t-elle des solutions ?	B. Pour tout nombre x, l'image de x par la fonction f est $3x^2 + 1$
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.	C. Déterminer l'ensemble des tous les nombres x pour lesquels $f(x)$ et x sont égaux.

$\boxed{12}$ On considère la proposition suivante : « Tout nombre réel est inférieur ou égal à son carré ».
Cette proposition est-elle vraie ?

$\boxed{13}$ La proposition « $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} \leq 1$ » est-elle vraie ou fausse ?

Corrigé

$\boxed{1}$ Phrases à quantifier

a. **Pour tout** point M appartenant à $\mathcal{C}$, OM = OA.

b. **Il existe** un point M appartenant à $\mathcal{C}$; AM = r.

c. **Il existe** un point M appartenant à $\mathcal{C}$; (OM) $\perp$ (OA).

d. **Il existe** un point M extérieur au cercle $\mathcal{C}$, OM = 2r

e. **Pour tout** point M extérieur au cercle $\mathcal{C}$, OM > r

$\boxed{2}$ Phrases à quantifier

a. Il existe deux réels x et y tels que $xy = 3$.

b. Pour tous réels x et y, $x^2 + y^2 \geq 0$.

c. Il existe deux réels x et y tels que $x + y > x$.

Ce n'est vrai que lorsque $y > 0$.

d. Pour tous réels x et y, $(xy)^2 = x^2 y^2$.

$\boxed{3}$ Contre-exemples

a. « Si n est multiple de 6 et n est multiple de 8 alors n est multiple de 6×8. »

Contre-exemple : 24

b. « Pour tout x réel, si $x^2 > 4$ alors $x > 2$ »

Contre-exemple : – 3

c. « Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur est un carré »

Contre-exemple : le deuxième quadrilatère.

$\boxed{4}$ Négation d'une phrase quantifiée

- ☐ non
- ☐ non
- ☐ non
- ☐ non

$\boxed{5}$ Phrases à quantifier

a. Il existe un réel $x \in [0 ; 5]$ tel que $f(x) > -4$.

b. Pour tout réel $x \in [0 ; 5]$ tel que $f(x) \leq 1$.

c. Il existe un réel $x \in [0 ; 5]$ tel que $f(x) = -3$.

d. Pour tout réel $x \in [0 ; 5]$ tel que $f(x) \leq 0$.

e. Pour tout réel $x \in [0 ; 4]$ $f(x) \leq -1$.

f. Il existe un réel $x \in [0 ; 4]$ tel que $f(x) \geq -2$.

g. Il existe un réel $x \in [0 ; 5]$ tel que $f(x) = -1$.

h. Pour tout réel $x \in [0 ; 4]$ $f(x) \geq -5$.

$\boxed{6}$ Valeur de vérité d'une proposition quantifiée par un « pour tout »

La proposition : « Pour tous réels *a* et *b* positifs ou nuls $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ » est fausse.

On peut prendre comme exemple $a = b = 2$: $\sqrt{2+2} = 2$ alors que $\sqrt{2} + \sqrt{2} \approx 2,83$.

Un exemple plus simple est donné par $a = 9$ et $b = 16$: $\sqrt{9+16} = 5$; $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

$\boxed{7}$ Valeur de vérité d'une proposition quantifiée par un « il existe »

La proposition *P* : « Il existe deux réels dont la somme est égale au produit » est vraie.

Cette proposition peut s'écrire avec des lettres :

« Il existe deux réels x et y tels que $x + y = xy$. »

Exemples :

$x = 0$; $y = 0$	$0 + 0 = 0$ et $0 \times 0 = 0$
$x = 2$; $y = 2$	$2 + 2 = 4$ et $2 \times 2 = 4$

On peut démontrer que les seuls couples (x, y) **d'entiers relatifs** qui vérifient $x + y = xy$ sont $(0 ; 0)$ et $(2 ; 2)$.

$\boxed{8}$ Reformulation de phrases quantifiées à l'aide d'ensembles

E : ensemble des entiers pairs

F : ensemble des entiers impairs

- **« La somme de deux entiers pairs est un entier pair ».**

La somme de deux entiers appartenant à E appartient à E.

- **« La somme de deux entiers impairs est un entier pair ».**

La somme de deux entiers appartenant à F appartient à E.

- **« La somme d'un entier pair et d'un entier impair est un entier impair ».**

La somme d'un entier appartenant à E et d'un entier appartenant à F appartient à F.

$\boxed{9}$ Autour de l'égalité $x^3 = x$

a) « Pour tout réel x, $x^3 = x$. »

b) « Il existe au moins un nombre réel x tel que $x^3 = x$. »

c) « Il existe un nombre réel x tel que $x^3 = x$. »

a) faux
b) vrai
c) vrai

$\boxed{10}$ La négation de la phrase « Tous les murs de la pièce sont blancs » est « Il y a un mur de la pièce qui n'est pas blanc »

$\boxed{11}$ Formulations équivalentes

1-B
2-A
3-C

$\boxed{12}$ Valeur de vérité d'une proposition quantifiée par un « pour tout »

« Tout nombre réel est inférieur ou égal à son carré »

Cette proposition est fausse : exemple : 0,5 (on peut prendre n'importe quel nombre compris entre 0 et 1 strictement).

$\boxed{13}$ Valeur de vérité d'une proposition quantifiée par un « pour tout »

« $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{n} \leq 1$ »

Cette proposition est vraie.