$1^{\text{ère}}$ S **Exercices sur l'approximation affine tangente**

1 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$.

1°) Déterminer la fonction affine tangente g associée à f en 1.
2°) Recopier et compléter le tableau :

x	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f(x)$				
$g(x)$				

Commenter ce tableau.
A-t-on besoin de la calculatrice pour calculer les nombres de la troisième ligne ?

2 À l'aide de la formule de l'approximation affine tangente d'une fonction au voisinage d'un réel bien choisi, donner sans calculatrice une valeur approchée des réels suivants :
1°) $(5{,}001)^2$ 2°) $(2{,}001)^3$ 3°) $(1{,}997)^3$

On commencera par définir une fonction.
On ne cherchera pas à évaluer l'erreur.
Comparer avec les résultats fournis par une calculatrice.

3 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on a : $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(0)=1$.
On admettra qu'une telle fonction existe sans chercher à déterminer l'expression.

Calculer une valeur approchée de $f(0{,}1)$ puis de $f(0{,}01)$ par la formule d'approximation affine tangente.
On ne cherchera pas à évaluer l'erreur.

4 **Approximations affines tangentes des fonctions de référence en 1**

Dans chaque cas, on définit une fonction f par son expression.
On demande de donner une valeur approchée de $f(1+h)$ pour h « proche » de 0 par la formule d'approximation affine tangente.

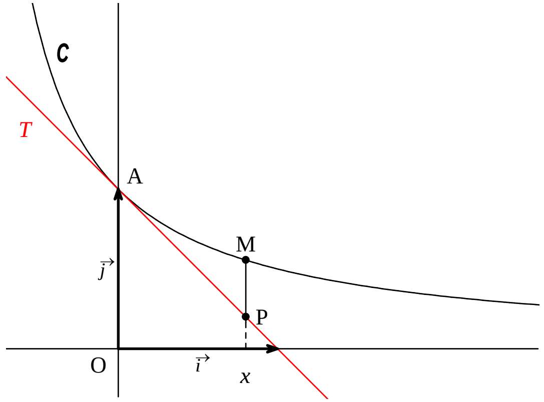
1°) Fonction puissance : $f(x)=x^n$ (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1)
2°) Fonction inverse : $f(x)=\dfrac{1}{x}$
3°) Fonction racine carrée : $f(x)=\sqrt{x}$

Recopier et compléter le tableau pour h « proche » de 0 :

$(1+h)^n \approx$ ....
$\dfrac{1}{1+h} \approx$ ....
$\sqrt{1+h} \approx$ ....

5 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
Déterminer l'approximation affine tangente de $f(4+h)$ pour h proche de 0.

6 On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point A(0 ; 1).
Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et P le point de T qui a la même abscisse que M.



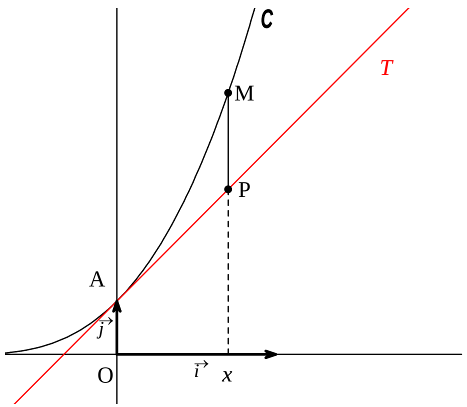
1°) Établir une équation de T.
2°) Exprimer la distance MP en fonction de x.
3°) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant au dix-millième.

x	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
MP					

4°) Démontrer que si $0 \leq x \leq 0{,}1$, alors $\mathrm{MP} \leq 0{,}01$.
Interpréter ce résultat en termes d'approximation affine et d'erreur.

$\boxed{7}$ On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^3$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On note *T* la tangente à $\mathcal{C}$ au point A(0 ; 1).
Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse *x* et P le point de *T* qui a la même abscisse que M.



1°) Établir une équation de *T*.
2°) Exprimer la distance MP en fonction de *x*.
3°) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant au dix-millième.

x	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
MP					

4°) Démontrer que si $0 \le x \le 0,1$, alors $\text{MP} \le 0,04$.
Interpréter ce résultat en termes d'approximation affine et d'erreur.

$\boxed{8}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$.
1°) Déterminer l'approximation affine tangente de $f(1+h)$ pour *h* proche de 0.
2°) Démontrer que pour tout réel *h*, on a : $(1+h)^3-1-3h=3h^2+h^3$.
En déduire que pour tout réel *h* tel que $0 \le h \le 1$, on a $0 \le (1+h)^3-1-3h \le 4h^2$.
3°) Donner de tête une valeur approchée de $1{,}01^3$ et préciser un majorant de l'erreur.

$\boxed{9}$ On sait que 1,432 est une valeur approchée d'un réel *x* à 10^{-3} près.
Détermine un encadrement de *x*.

Réponses

$\boxed{1}$ 1°) $g(x)=2x-1$

2°)

x	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f(x)$	1,21	1,0201	1,0020001	1,00020001
$g(x)$	1,2	1,02	1,002	1,0002

On constate que pour des valeurs de *x* proches de 1, les valeurs de $f(x)$ sont très proches des valeurs de $g(x)$.

$\boxed{2}$ 1°) $(5{,}001)^2 \approx 25{,}01$ 2°) $(2{,}001)^3 \approx 8{,}012$ 3°) $(1{,}997)^3 \approx 7{,}964$

$\boxed{4}$ **Tableau**

$(1+h)^n \approx 1+nh$
$\dfrac{1}{1+h} \approx 1-h$
$\sqrt{1+h} \approx 1+\dfrac{h}{2}$

$\boxed{5}$ La formule d'approximation affine tangente en 4 donne : $\sqrt{4+h} \approx 2+\dfrac{h}{4}$ pour *h* « proche » de 0.

$\boxed{8}$ $f : x \mapsto x^3$.
1°) Déterminons l'approximation affine tangente de $f(1+h)$ pour *h* proche de 0.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x)=3x^2$.
D'après la formule d'AAT en 1, pour tout réel *h* proche de 0, on a : $f(1+h) \approx f(1)+hf'(1)$.

Or $f(1)=1$ et $f'(1)=3$ donc pour tout réel *h* proche de 0, on a : $f(1+h) \approx 1+3h$.

2°) Démontrons que pour tout réel *h*, on a : $(1+h)^3-1-3h=3h^2+h^3$.

$\forall h \in \mathbb{R}$ $(1+h)^3-1-3h=\cancel{1}+\cancel{3h}+3h^2+h^3\cancel{-1}\cancel{-3h}=3h^2+h^3$.

On utilise l'identité remarquable $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Déduisons-en que pour tout réel *h* tel que $0 \le h \le 1$, on a $0 \le (1+h)^3-1-3h \le 4h^2$.

$\forall h \in \mathbb{R}$ $(1+h)^3-1-3h=3h^2+h^3$.
Donc de manière évidente, si $0 \le h \le 1$, alors $3h^2+h^3 \ge 0$ d'où $(1+h)^3-1-3h \ge 0$ (1).

D'autre part, $\forall h \in \mathbb{R} \quad (1+h)^3 - 1 - 3h = h^2(3+h)$.

Donc si $0 \leq h \leq 1$, alors $3+h \leq 4$ d'où en multipliant les deux membres de l'inégalité par h^2 qui est positif ou nul, $h^2(3+h) \leq 4h^2$.
Donc si $0 \leq h \leq 1$, alors $(1+h)^3 - 1 - 3h \leq 4h^2$ (2).

D'après (1) et (2), on en déduit que pour tout réel h tel que $0 \leq h \leq 1$, on a $0 \leq (1+h)^3 - 1 - 3h \leq 4h^2$.

3°) D'après la formule d'AAT établie au 1°), en prenant $h = 0,01$ (considéré comme « proche » de 0),

$f(1+0,01) \approx 1 + 3 \times 0,01$ d'où $f(1,01) \approx 1,03$.

D'où $1,01^3 \approx 1,03$.

Dans la question 2°), on a établi que pour tout réel h tel que $0 \leq h \leq 1$, on a $0 \leq (1+h)^3 - 1 - 3h \leq 4h^2$ soit
$0 \leq \underbrace{f(1+h)}_{\text{valeur exacte}} - \underbrace{(1+3h)}_{\text{valeur approchée}} \leq 4h^2$.

Donc si $0 \leq h \leq 1$, on a erreur commise $\leq 4h^2$.

Donc pour $h = 0,01 = 10^{-2}$, un majorant de l'erreur commise est de 4×10^{-4}.

$\boxed{\mathbf{9}}$ On sait que 1,432 est une valeur approchée d'un réel x à 10^{-3} près.
Détermine un encadrement de x.