Justifier l'existence d'un extremum

Méthode

• M est le maximum de la fonction f sur l'intervalle I lorsque, pour tout réel x de I, on démontre que : $M - f(x)$ est positif ou nul, et nul en une valeur de I.

• m est le minimum de la fonction f sur l'intervalle I lorsque, pour tout réel x de I, on démontre que : $f(x) - m$ est positif ou nul, et nul en une valeur de I.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 14$.

Démontrer que 5 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) - 5 &= x^2 + 6x + 14 - 5 \\ &= x^2 + 6x + 9 \\ &= (x+3)^2 \end{aligned}$$

Ce carré est toujours positif ou nul, et il est nul pour $x = -3$.

Donc, 5 est le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$, atteint en -3.

Exercices

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 4x + 5$.

Démontrer que 4 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$.

Démontrer que 5 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 4x + 7$.
Justifier que la fonction f atteint un maximum en -2 et calculer ce maximum.

4 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2 + x$.

Démontrer que le minimum de f est atteint en 1.

5 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = -x + 5 - \dfrac{4}{x}$.

Démontrer que 1 est le maximum de f atteint en 2.

Solutions

$\boxed{1}$ $f(x) = 4x^2 - 4x + 5$

Démontrons que 4 est le minimum de *f* sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) - 4 &= 4x^2 - 4x + 5 - 4 \\ &= 4x^2 - 4x + 1 \\ &= (2x-1)^2 \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = -x^2 + 2x + 4$

Démontrons que 5 est le maximum de *f* sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) - 5 &= -x^2 + 2x + 4 - 5 \\ &= -x^2 + 2x - 1 \\ &= -(x-1)^2 \end{aligned}$$

Un carré est toujours positif donc la différence $f(x) - 5$ est toujours négative ou nulle ; elle est nulle pour $x = 1$.
Donc 5 est le maximum de *f* sur $\mathbb{R}$ atteint en 1.