TS

Le raisonnement par récurrence, un outil puissant de démonstration

I. Intérêt

1°) Exemple

u est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

(suite récurrente ; suite « arithmético-géométrique » ; on ne connaît pas l'expression du terme général en fonction de n).

Calculons les premiers termes de cette suite.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	0	1	3	7	15	31	63	127

Conjecture :

Il semble que l'on ait pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$ (cf. passage du mode récurrent au mode explicite pour une suite).

2°) Problème

Si l'on note pour $n \in \mathbb{N}$ la phrase $P(n)$: « $u_n = 2^n - 1$ », on vérifie facilement que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ … $P(7)$ sont vraies.

Pour démontrer que la phrase est **toujours** vraie, on ne peut pas se contenter de quelques vérifications, aussi nombreuses soient-elles.

Pour cela, il faudrait disposer d'un raisonnement qui permette en un nombre fini d'étapes de montrer que la phrase $P(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n (qui sont une infinité).

Le raisonnement par récurrence permet précisément d'opérer **« le passage du fini à l'infini »** (selon la formule célèbre d'Henri Poincaré).

3°) Autre approche

On a déjà utilisé un type de raisonnement appelé raisonnement de **« proche en proche »** qui permet d'établir des propriétés sur le signe des termes d'une suite ou des majorations-minorations (par contre, pas pour des sens de variation).

Le raisonnement par récurrence va permettre de formaliser ce type de raisonnement.

II. Théorème de récurrence

1°) Énoncé (admis sans démonstration)

$P(n)$ est une phrase mathématique dépendant d'un entier naturel n.
On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

C_1 : $P(0)$ est vraie
C_2 : Si la phrase $P(k)$ est vraie pour **un** entier naturel k fixé alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Dans ce cas, on peut affirmer que la phrase $P(n)$ est vraie pour **tout** entier naturel n.

Schéma :

- $P(0)$ est vraie
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ vraie

Alors, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

2°) Vocabulaire

C_1 : « initialisation »
C_2 : « hérédité » - « transmissibilité » - « propagation »

3°) Extension (phrases vraies à partir d'un certain rang)

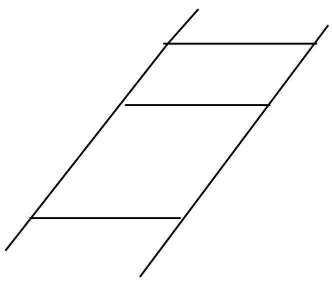
- Lorsque $P(n_0)$ est vraie
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ vraie

Alors pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie .

III. Explication du principe

1°) Barreaux d'une échelle

Si l'on peut mettre un pied sur un barreau de l'échelle (le barreau n_0) et **si** l'on peut passer d'un barreau quelconque au suivant, alors on peut gravir tous les barreaux de l'échelle à partir du barreau n_0.



2°) Dominos

On peut aussi donner l'image de dominos qui tombent les uns après les autres.

3°) Remarques

- **La partie « initialisation » est très importante** ; il existe des phrases qui sont héréditaires mais pas vraies au rang initial.

- **La partie « hérédité » utilise un mode de raisonnement déductif.**
  On peut avoir l'impression que l'on part du résultat pour démontrer le résultat.
  Ce n'est évidemment pas du tout le cas.

IV. Exemple de mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence

u est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant -2$.

Rédaction	**Commentaires**
Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geqslant -2$.	Le résultat d'une récurrence : « pour tout $n \in \mathbb{N}$ » ou « pour tout $n \geqslant n_0$ »
Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$: « $u_n \geqslant -2$ ».	On donne un nom à la phrase mathématique. Elle découle toujours de l'énoncé qui est donné.
Initialisation : Vérifions que $P(0)$ est vraie. $u_0 = 1$ par hypothèse donc $u_0 \geqslant -2$. D'où $P(0)$ est vraie.	Transcription de la phrase $P(0)$.
Hérédité : Considérons $\boxed{\textbf{un}}$ entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k \geqslant -2$. Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant -2$. Par hypothèse de récurrence, on a : $u_k \geqslant -2$ $\times \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2} > 0\right)$ d'où $\frac{1}{2} u_k \geqslant -1$ -1 $\frac{1}{2} u_k - 1 \geqslant -2$ $u_{k+1} \geqslant -2$ Donc $P(k+1)$ est vraie.	On sait qu'un tel entier existe ($k = 0$). On part de $u_k \geqslant -2$ (hypothèse de récurrence) $\downarrow$ On veut arriver à $\underbrace{u_{k+1}}_{\frac{1}{2}u_k - 1} \geqslant -2$. Il faut « incruster » $\frac{1}{2}$ et -1.
Conclusion : On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie. Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour $\boxed{\textbf{tout}}$ entier naturel n.	Conditions C_1 et C_2 du théorème. Cela marche comme des dominos qui tombent les uns après les autres. $P(0)$ vraie $\Rightarrow$ $P(1)$ vraie $\Rightarrow$ $P(2)$ vraie

(En gros le « pour tout » ne marche qu'avec le *n* !)
Il est important de comprendre que le « pour tout » est quelque chose que l'on « gagne » à la fin de la démonstration.

On suppose que $P(k)$ est vraie donc on a le droit d'utiliser $P(k)$ dans la suite… (idée fondamentale à comprendre). En revanche, on n'a pas le droit d'utiliser que $P(k+1)$ est vraie (puisque c'est ce que l'on veut démontrer).

V. Autre exemple de mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence

u est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ (reprise de l'exemple du **I**).

Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = 2^n - 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase *P* (*n*) : « $u_n = 2^n - 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que *P* (0) est vraie.
$u_0 = 0$ par hypothèse donc $u_0 = 1 - 1 = 2^0 - 1$.
D'où *P* (0) est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase *P*(*k*) soit vraie c'est-à-dire $u_k = 2^k - 1$.
Démontrons qu'alors la phrase *P*(*k* + 1) est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_k = 2^k - 1$$

$\times 2$ (en effet : $2 \times 2^k = 2^1 \times 2^k = 2^{k+1}$ d'après les règles sur les puissances)

d'où $2u_k = 2^{k+1} - 2$

$+1$

Par suite, $2u_k + 1 = 2^{k+1} - 1$

$u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$
Donc *P*(*k* + 1) est vraie.

Autre rédaction :

$u_{k+1} = 2u_k + 1$

$u_{k+1} = 2\left(2^k - 1\right) + 1$

$u_{k+1} = 2^{k+1} - 2 + 1$

$u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$

Conclusion :

On a démontré que P (0) est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase P (n) est vraie pour tout entier naturel n.

VI. Remarques

1°) Remarque historique

Pascal est le premier mathématicien à avoir fait un raisonnement par récurrence pour démontrer une propriété (« **raisonnement inductif** »).

2°) Rédaction

⚠ à bien respecter le protocole.

(beaucoup de rédaction, aucun quantificateur).

3°) Quelles propriétés peut-on démontrer par récurrence ?

- **Avec des suites**
On pourra démontrer énormément de résultats : minorations, majorations, sens de variations, expression du terme général d'une suite, formules sommatoires etc.

- **Sans des suites** (cf. ex.)
Propriétés des entiers naturels par exemple.

Ne pas écrire de raccourci du type P (0) = 3.

VII. Appendice : remarques sur le symbole Σ

1°) Quelques formules

u désigne une suite.

$$\sum_{k=0}^{k=n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{k=n} u_k\right) + u_{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n+2} u_k = \left(\sum_{k=0}^{k=n} u_k\right) + u_{n+1} + u_{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \left(\sum_{k=0}^{k=n} u_k\right) - u_0$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{k=n} u_k\right) - u_n$$

2°) Utilisation : formules sommatoires

Voir exercices.