1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur équations de droites et systèmes

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère quelconque $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 On considère les points $A(1\,;-3)$ et $B(-2\,;2)$.
Déterminer une équation cartésienne de (AB) par la méthode vectorielle (attention à la rédaction).
Faire une phrase de conclusion.

2 On considère les points $A(1\,;2)$ et $B(-5\,;2)$.
Déterminer une équation de (AB).

3 On considère les points $A(-3\,;2)$ et $B(-3\,;1)$.
Déterminer une équation de (AB).

4 Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par le point $A(3\,;-4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;3)$.

5 On donne les droites d'équations
$D_1 : y=\frac{1}{4}x-7$, $D_2 : x=2$, $D_3 : y=-\frac{1}{4}x-4$, $D_4 : y=2$, $D_5 : y=-2x$, $D_6 : y=5$, $D_7 : y=-2x+1$, $D_8 : x=-9$.

Parmi ces droites, indiquer celles qui sont parallèles.

6 On note D la droite d'équation $y=\frac{1}{3}x-2$. Soit A le point de coordonnées (1 ; 2).
On note D' la droite passant par A et parallèle à D et D'' la droite passant par O et parallèle à D.
1°) Tracer D, D', D''.
2°) Déterminer l'équation réduite de D'.
3°) Déterminer l'équation réduite de D''.

7 Soit D la droite d'équation cartésienne $5x-2y-1=0$.
On considère les points $A\left(4\,;\frac{19}{2}\right)$, B(1 ; 2), C(2 ; 4).
Sans tracer D et sans transformer l'équation cartésienne, déterminer si ces points appartiennent à D.

8 Donner dans la colonne de droite les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D.

Équation de D	Coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D
$2x+5y-1=0$	
$x-3y+2=0$	
$y=2$	
$x=5$	
$y=1-2x$	

9 Associer à chacune des droites définies ci-dessous, un des vecteurs directeurs suivants :
$\vec{u_1}\,(1\,;-1)$; $\vec{u_2}\,(3\,;1)$; $\vec{u_3}\,(1\,;-2)$; $\vec{u_4}\,(2\,;6)$; $\vec{u_5}\,(-3\,;1)$.
$D_1 : y=-2x+3$, $D_2 : y=3x$, $D_3 : x-3y=2$, $D_4 : x+y=3$, $D_5 : 3y=-x+1$.

Recopier et compléter le tableau.

Vecteur	$\vec{u_1}$	$\vec{u_2}$	$\vec{u_3}$	$\vec{u_4}$	$\vec{u_5}$
Droite associée					

10 On considère les points A(– 1 ; 5), B(2 ; 3) et C(4 ; 1).
Soit D la droite passant par le point C et parallèle à (AB).
Déterminer une équation cartésienne de D par la méthode vectorielle.

11 Soit D la droite d'équation cartésienne $x+2y+3=0$.
1°) Déterminer l'équation réduite de D.
2°) Tracer D.
3°) Déterminer une équation cartésienne de la droite D' passant par le point A(1 ; – 3) et parallèle à D.

12 Soit D la droite d'équation cartésienne $x+2y-3=0$.
La droite D coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B.
Calculer les coordonnées de A et B. Contrôler graphiquement.

13 Soit D la droite d'équation cartésienne $x-3y+5=0$.
1°) Calculer l'ordonnée du point A de D qui a pour abscisse – 1.
2°) Calculer l'abscisse du point B de D qui a pour ordonnée 2.

14 Déterminer l'équation réduite de la droite D passant par le point A(1 ; 2) et de coefficient directeur 3.

15 On note D et D' les droites d'équations cartésiennes respectives $6x-9y+11=0$ et $4x-6y-5=0$.
Les droites D et D' sont-elles parallèles ?

16 Pour tout réel *m*, on note D_m la droite d'équation cartésienne $(m-3)x+5my+4m+3=0$.

1°) Déterminer *m* tel que D_m passe par le point A(– 2 ; 1).

On rédigera ainsi :

« A $\in D_m$ si et seulement si ……………
si et seulement si …………… »

2°) Démontrer que toutes les droites D_m passent par le point $\text{K}(1\,;-1)$.

17 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(I) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 7x+4y=1 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=-1 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \end{cases}$ (III) $\begin{cases} 2(x-4)=y-1 \\ x+1=3(y+2) \end{cases}$ (IV) $\begin{cases} x\sqrt{2}+y=4 \\ -x+y\sqrt{2}=-1 \end{cases}$

18 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 7x^2-9y^2=5 \\ -3x^2+5y^2=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \sqrt{x}+4\sqrt{y}=8 \\ 3\sqrt{x}-5\sqrt{y}=7 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3|\,x\,|-2|\,y\,|=-5 \\ 5|\,x\,|+|\,y\,|=9 \end{cases}$.

19 On considère les points A(1 ; 0) et B(1 ; 3).

Caractériser la demi-droite [AB) par un système de conditions portant sur les coordonnées $(x\,;y)$ d'un point.

20 On note D et D' les droites d'équations cartésiennes respectives $3x-4y+7=0$ et $2x+5y-1=0$.

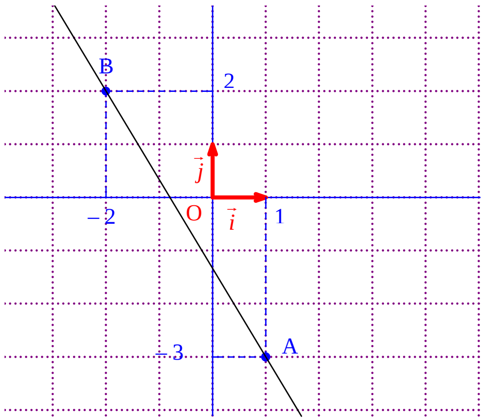
Les droites D et D' sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Corrigé

1

A(1 ; – 3) B(– 2 ; 2)

Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB).



$M(x, y)$ est un point quelconque du plan.

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} -3 \\ 5 \end{vmatrix}$

$M \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x-1 \\ y+3 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ y+3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $5(x-1)-(y+3)\times(-3)=0$

si et seulement si $5x-5+3y+9=0$

si et seulement si $5x+3y+4=0$

$5x+3y+4=0$ est une équation cartésienne de (AB).

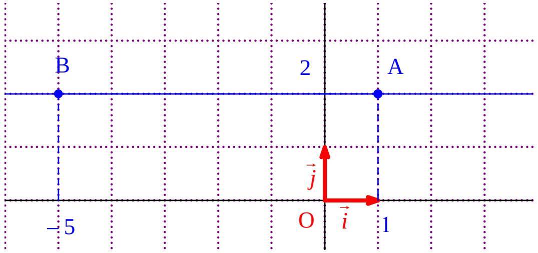
(AB) a pour équation cartésienne $5x+3y+4=0$.

On peut effectuer une vérification au moyen du programme sur les équations de droites dans la calculatrice.

2

A(1 ; 2) B(– 5 ; 2)

Déterminons une équation de la droite (AB).



1ère méthode (la plus simple et donc la mieux) :

On constate que $y_A = y_B = 2$ donc (AB) // (Ox).
On en déduit que (AB) a pour équation $y=2$.

2e méthode :

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} -6 \\ 0 \end{vmatrix}$

$M(x, y)$ est un point quelconque du plan.

$M \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x-1 \\ y-2 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x-1 & -6 \\ y-2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $-6(y-2)=0$

si et seulement si $y-2=0$ (équation cartésienne)

si et seulement si $y=2$

Version très maladroite pour les deux dernières lignes :

si et seulement si $-6(y-2)=0$

si et seulement si $-6y+12=0$

si et seulement si $-\frac{6}{6}y+\frac{12}{6}=0$

si et seulement si $-y+2=0$ (équation cartésienne)

si et seulement si $y=2$

Pour l'exercice $\boxed{2}$, je l'ai fait avec Mayllis Lasri le 2-1-2016.

Je lui ai fait écrire deux solutions.

Solution 1 :

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} -6 \\ 0 \end{vmatrix}$

Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan.

$M \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x-1 \\ y-2 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

etc.

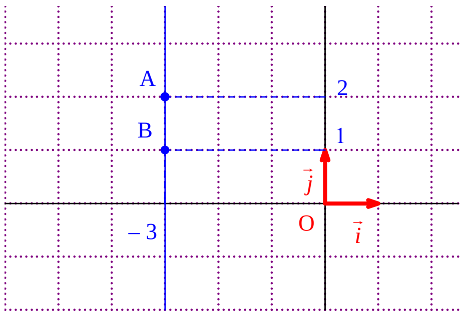
Solution 2 : $\longrightarrow$ plus simple

On constate que $y_A = y_B = 2$ donc …

$\boxed{3}$

A(– 3 ; 2)   B(– 3 ; 1)

Déterminons une équation de la droite (AB).



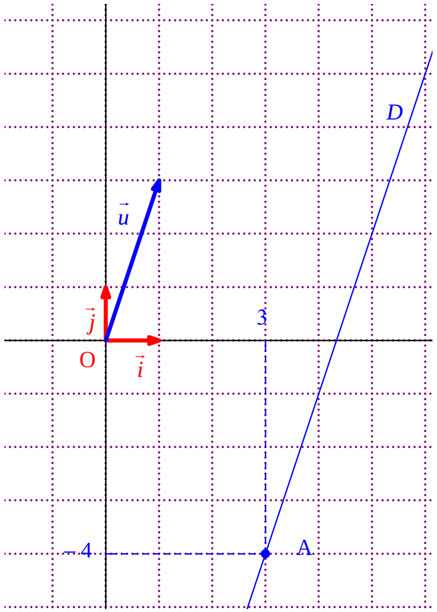
On constate que $x_A = x_B = -3$ donc (AB) // (O*y*).

On en déduit que (AB) a pour équation $x = -3$.

$\boxed{4}$

A(3 ; – 4) $\vec{u}\,(1 ; 3)$

D : droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$



Déterminons une équation cartésienne de la droite *D*.

M(*x*, *y*) est un point quelconque du plan.

$M \in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x-3 \\ y+4 \end{vmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ y+4 & 3 \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $3(x-3) - 1(y+4) = 0$

si et seulement si $3x - 9 - y - 4 = 0$

si et seulement si $3x - y - 13 = 0$

$3x - y - 13 = 0$ est une équation cartésienne de *D*.

$\boxed{5}$

$D_1 : y = \frac{1}{4}x - 7$, $D_2 : x = 2$, $D_3 : y = -\frac{1}{4}x - 4$, $D_4 : y = 2$, $D_5 : y = -2x$, $D_6 : y = 5$, $D_7 : y = -2x + 1$,
$D_8 : x = -9$

On ne précise pas quelles droites ne sont pas parallèles.

$D_2 \,//\, D_8$ (elles sont toutes les deux parallèles à l'axe des ordonnées)

$D_5 \,//\, D_7$ (même coefficient directeur)

$D_4 \,//\, D_6$ (en effet, elles ont toutes les deux pour coefficient directeur 0 ; elles dont parallèles à l'axe des abscisses)

$\boxed{6}$

2°) $D' : y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

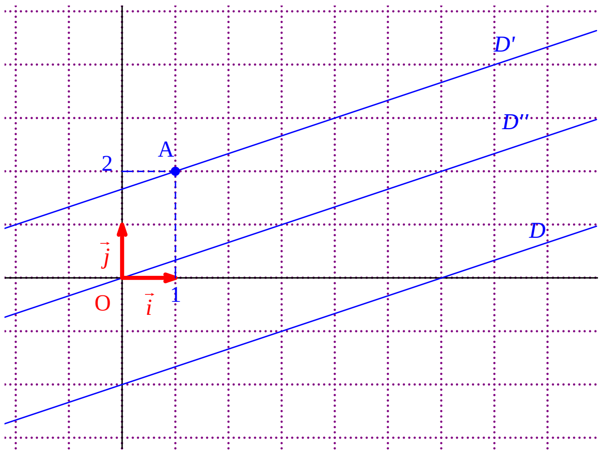
3°) $D'' : y = \frac{1}{3}x$

Solution détaillée:

$D : y = \frac{1}{3}x - 2$

$\text{A}(1\,;2)$

1°) **Traçons les droites *D*, *D'*, *D''*.**



On va donner deux grandes méthodes pour tracer *D* :

1ère méthode :

• Déjà, on utilise le coefficient directeur : il est positif donc la droite est « croissante ».

Ensuite, on regarde l'ordonnée à l'origine qui vaut – 2. Donc on se place à – 2 sur l'axe des ordonnées.

On ajoute 1 aux abscisses et on monte de $\frac{1}{3}$.

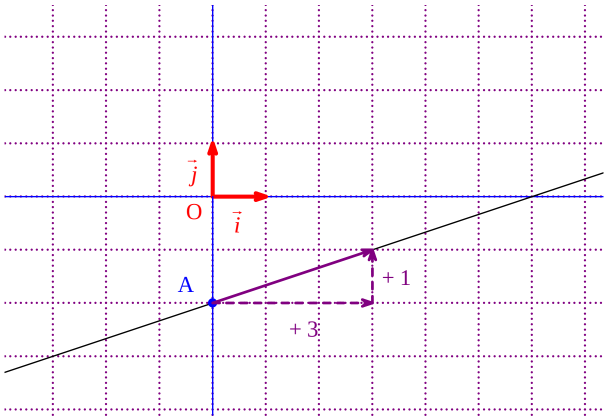
Version élève : On *incrémente* l'abscisse de 1 puis on monte de $\frac{1}{3}$.

On avance de 3 unités vers la droite horizontalement et on monte verticalement de 1 unité.

Une meilleure explication consiste à utiliser les vecteurs directeurs.

On sait que le vecteur $\vec{u}\left(1\,;\frac{1}{3}\right)$ est un vecteur directeur de *D* donc le vecteur $3\vec{u}\,(3\,;1)$ est aussi un vecteur directeur de *D*.

On fait une figure sur laquelle on représente le vecteur $3\vec{u}$ en prenant pour origine le point de coordonnées (0 ; – 2).
On montre le « chemin » tracé en pointillés.



2e méthode : On calcule les coordonnées de deux points.

On utilise un tableau de valeurs.

Version élève : On peut *« calculer »* deux points.

x	– 3	6
y	– 3	0

On choisit deux valeurs de *x* au hasard, par exemple – 3 et 6.

On calcule les valeurs de y correspondantes avec l'équation $y=\frac{1}{3}x-2$.

On a : $\frac{1}{3}\times(-3)-2=-1-2=-3$; $\frac{1}{3}\times 6-2=3-2=1$. On remplit la deuxième ligne du tableau.

Parfois, on utilise un troisième point dit « de vérification ».

Question d'une élève de 1ère S (Marie-Zélie Gagnard) le 3 octobre 2013 :

« Qu'est-ce qu'on présente sur la copie quand on doit tracer une droite dont on connaît une équation ? »

Réponse : On présente le tableau de valeurs.

On notera que dans cette méthode, on présente uniquement sur la copie un tableau de valeurs au-dessus ou au-dessous du graphique, sans donner d'explication supplémentaire.

2°) **Déterminons l'équation réduite de *D'*.**

On travaille avec des équations réduites.

On utilise la propriété suivante :

Soit D et D' deux droites du plan non parallèles à l'axe des abscisses.

$D\,//\,D'$ si et seulement si D et D' ont le même coefficient directeur.

1ère méthode : longue donc à éviter

$D\,//\,D'$ donc D' a le même coefficient directeur que D c'est-à-dire $\frac{1}{3}$.

L'équation réduite de D' s'écrit donc $y=\frac{1}{3}x+p$ avec $p\in\mathbb{R}$.

$\text{A}\in D'$ donc $y_{\text{A}}=\frac{1}{3}x_{\text{A}}+p$ d'où $p=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$.

Conclusion : D' a pour équation réduite $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

Il serait un peu difficile de répondre graphiquement à cette question car l'ordonnée à l'origine de D' $\left(\frac{5}{3}\right)$ ne peut être lue avec précision.

2e méthode : plus rapide donc à privilégier

On utilise la propriété du cours :

La droite passant par un point $\text{A}(x_{\text{A}}\,;\,y_{\text{A}})$ et de coefficient directeur m a pour équation $\boldsymbol{y=m(x-x_{\text{A}})+y_{\text{A}}}$.

$D\,//\,D'$ donc D' a le même coefficient directeur que D c'est-à-dire $\frac{1}{3}$.

D' a donc pour équation $y=\frac{1}{3}(x-1)+2$ soit $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

3°) **Déterminons l'équation réduite de *D''*.**

Même méthode ; même rédaction qu'à la question 2°).
O désigne l'origine du repère donc O a pour coordonnées (0 ; 0).

$D''\,//\,D$ donc D'' a le même coefficient directeur que D.

L'équation réduite de D'' s'écrit donc $y=\frac{1}{3}x+p'$ avec $p'\in\mathbb{R}$.

$\text{O}\in D''$ donc $y_{\text{O}}=\frac{1}{3}x_{\text{O}}+p'$ d'où $p'=0$.

Conclusion : D'' a pour équation réduite $y=\frac{1}{3}x$.

On pourrait répondre graphiquement à cette question.

2e méthode : plus rapide donc à privilégier

On utilise la propriété du cours :

La droite passant par un point $\text{A}(x_{\text{A}}\,;\,y_{\text{A}})$ et de coefficient directeur m a pour équation $\boldsymbol{y=m(x-x_{\text{A}})+y_{\text{A}}}$.

$D''\,//\,D$ donc D'' a le même coefficient directeur que D c'est-à-dire $\frac{1}{3}$.

D'' a pour équation $y=\frac{1}{3}(x-0)+0$ soit $y=\frac{1}{3}x$.

$\boxed{7}$

D : $5x-2y-1=0$
On ne transforme pas l'équation cartésienne de D donnée dans l'énoncé.

Déterminons si les points A, B, C appartiennent à *D*.

• $\text{A}\left(4\,;\dfrac{19}{2}\right)$

$5x_{\text{A}}-2y_{\text{A}}-1=20-19-1=0$ donc **A ∈ *D***.

• $\text{B}(1\,;2)$

$5x_{\text{B}}-2y_{\text{B}}-1=5-4-1=0$ donc **B ∈ *D***.

• $\text{C}(2\,;4)$

$5x_{\text{C}}-2y_{\text{C}}-1=10-8-1\neq 0$ donc **C ∉ *D***.

Quelques remarques :

On ne dit pas « $\text{A}\in D$ si et seulement si … ».
On démarre sèchement le calcul.
On effectue une démarche selon un mode déductif.

$\boxed{8}$ **Vecteur directeur**

Équation de *D*	**Coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de *D***
$2x+5y-1=0$	$\vec{u}\,(-5\,;2)$
$x-3y+2=0$	$\vec{u}\,(3\,;1)$
$y=2$	$\vec{u}\,(1;0)$ ou $\vec{i}$ (premier vecteur du repère)
$x=5$	$\vec{u}\,(0;1)$ ou $\vec{j}$ (deuxième vecteur du repère)
$y=1-2x$	$\vec{u}\,(1\,;-2)$

On a deux propriétés sur les vecteurs directeurs dans le cours :

P_1 : Une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ admet le vecteur de coordonnées $(-b\,;a)$ pour vecteur directeur.

P_2 : Une droite d'équation réduite $y=mx+p$ admet le vecteur de coordonnées $(1\,;m)$ pour vecteur directeur.

La propriété P_1 concerne les équations cartésiennes.

La propriété P_2 concerne les équations réduites.

La propriété P_2 se démontre à partir de la propriété P_1 en transposant le terme y dans le second membre de sorte que l'on obtient une équation cartésienne (ici $mx-y+p=0$).

• $2x+5y-1=0$
On applique directement la propriété P_1.

• $x-3y+2=0$
On applique directement la propriété P_1.

• $y=2$

Il y a deux méthodes possibles.

L'équation $y=2$ s'écrit aussi soit $0x-y+2=0$ (technique de réécriture).
On peut alors appliquer la propriété P_1.
Donc la droite d'équation $y=2$ admet le vecteur $\vec{u}\,(1;0)$ pour vecteur directeur.

On peut aussi réécrire l'équation initiale sous la forme $y=0x+2$.
On peut alors appliquer la propriété P_2.

On peut aussi retrouver le résultat graphiquement en disant que la droite d'équation $y=2$ est parallèle à l'axe des abscisses.

• $x=5$

On réécrit cette équation sous la forme $x-5=0$ ou mieux $x+0y-5=0$.
On peut alors appliquer la propriété P_1.

On observera que pour cette droite on ne peut absolument pas appliquer la propriété P_2 car on n'a pas un équation de la forme $y=mx+p$.

• $y=1-2x$

On peut écrire cette équation sous la forme : $y=-2x+1$.
On applique directement la propriété P_2.

On peut aussi écrire l'équation initiale sous la forme : $2x+y-1=0$.
On peut alors appliquer la propriété P_1.

On gardera à l'esprit que l'on peut multiplier les coordonnées d'un vecteur directeur par n'importe quel nombre non nul. On obtient encore les coordonnes d'un vecteur directeur de la droite.

On peut dégager une petite règle qui sera applicable directement.

Une petite propriété :

- Toute droite d'équation $x = k$ admet le vecteur $\vec{j}\,(0\,;1)$ pour vecteur directeur.
- Toute droite d'équation $y = k$ admet le vecteur $\vec{i}\,(1\,;0)$ pour vecteur directeur.

$\boxed{9}$

D_1 : $y = -2x + 3$
D_2 : $y = 3x$
D_3 : $x - 3y = 2$
D_4 : $x + y = 3$
D_5 : $3y = -x + 1$
$\overrightarrow{u_1}\,(1\,;-1)$; $\overrightarrow{u_2}\,(3\,;1)$; $\overrightarrow{u_3}\,(1\,;-2)$; $\overrightarrow{u_4}\,(2\,;6)$; $\overrightarrow{u_5}\,(-3\,;1)$

On peut réécrire les équations de certaines droites de manière à obtenir l'équation réduite ou une équation cartésienne.

Pour D_3, D_4, D_5, on met les équations données sous forme cartésienne ou réduite .

D_3 : $x - 3y - 2 = 0$ (plus simple) ou $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (un peu plus maladroit, donc moins bien)

D_4 : $x + y - 3 = 0$ ou $y = 3 - x$ (les deux formes sont bien toutes les deux)

D_5 : $x + 3y - 1 = 0$ (plus simple) ou $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ (un peu plus maladroit, donc moins bien)

Vecteur	$\overrightarrow{u_1}$	$\overrightarrow{u_2}$	$\overrightarrow{u_3}$	$\overrightarrow{u_4}$	$\overrightarrow{u_5}$
Droite associée	D_4	D_3	D_1	D_2	D_5

Explication pour le vecteur $\overrightarrow{u_4}$:

D_2 a pour équation $y = 3x$ donc le vecteur de coordonnées (1 ; 3) est un vecteur directeur de D_2 (car le coefficient directeur de D_2 est égal à 3).
Donc en multipliant par 2 ce vecteur (ce qui revient à multiplier par 2 les deux coordonnées), on obtient encore un vecteur directeur de D_2. Ainsi $\overrightarrow{u_4}$ est bien un vecteur directeur de D_2.

Explication pour le vecteur $\overrightarrow{u_5}$:

D_5 : $3y = -x + 1$
Attention ce n'est pas une pas une équation réduite à cause de la présence du $3y$ (une équation réduite c'est quand on a : $y = ...$).

On peut transformer cette équation réduite sous la forme $x + 3y - 1 = 0$.
La propriété P_1 nous dit alors que le vecteur de coordonnées $(-3\,;1)$ est un vecteur directeur de la droite D_5.
On constate qu'il s'agit du vecteur $\overrightarrow{u_5}$ fournit dans l'énoncé.

On peut aussi transformer l'équation réduite de D_5 sous la forme $-x - 3y + 1 = 0$.
La propriété P_1 nous dit alors que le vecteur $\overrightarrow{v_5}$ de coordonnées $(3\,;-1)$ est un vecteur directeur de la droite D_5 : $\overrightarrow{v_5} = -\overrightarrow{u_5}$ ($\overrightarrow{u_5}$ et $\overrightarrow{v_5}$ sont opposés).
Ce vecteur est différent du vecteur $\overrightarrow{u_5}$; on constate cependant qu'il s'agit de l'opposé du vecteur $\overrightarrow{u_5}$.
Cela n'a rien d'étonnant. Nous savons qu'une droite admet une infinité de vecteurs directeurs ; ils sont tous colinéaires.

Une technique de résolution commode :

Droites données dans l'énoncé	**Transformation éventuelle de l'équation initiale**	**Un vecteur directeur fourni par l'une des règles P_1 ou P_2**	**Vecteurs fournis par l'énoncé**
D_1 : $y = -2x + 3$		$\overrightarrow{v_1}\,(1\,;-2)$	$\overrightarrow{u_1}\,(1\,;-1)$
D_2 : $y = 3x$		$\overrightarrow{v_2}\,(1\,;3)$	$\overrightarrow{u_2}\,(3\,;1)$
D_3 : $x - 3y = 2$	$x - 3y - 2 = 0$	$\overrightarrow{v_3}\,(3\,;1)$	$\overrightarrow{u_3}\,(1\,;-2)$
D_4 : $x + y = 3$	$x + y - 3 = 0$	$\overrightarrow{v_4}\,(-1\,;1)$	$\overrightarrow{u_4}\,(2\,;6)$
D_5 : $3y = -x + 1$	$x + 3y - 1 = 0$	$\overrightarrow{v_5}\,(-3\,;1)$	$\overrightarrow{u_5}\,(-3\,;1)$

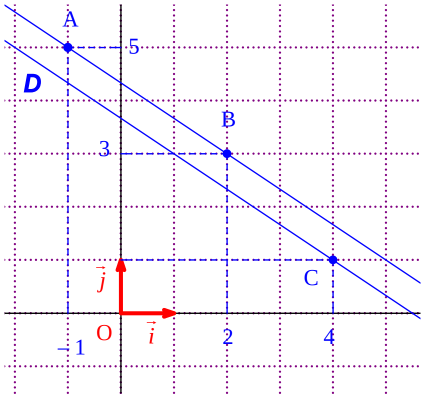
Pour chaque vecteur $\overrightarrow{v_i}$, on cherche un vecteur $\overrightarrow{u_i}$ qui lui est colinéaire.

$\boxed{10}$

A(– 1 ; 5) B(2 ; 3) C(4 ; 1)

D : droite passant par C et parallèle à (AB)

Déterminons une équation cartésienne de ***D***.



M(x, y) est un point quelconque du plan.

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}3\\-2\end{array}\right.$

M $\in$ ***D*** si et seulement si $\overrightarrow{CM}\left|\begin{array}{l}x-4\\y-1\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix}x-4 & 3\\ y-1 & -2\end{vmatrix}=0$

si et seulement si $(x-4)\times(-2)-(y-1)\times 3=0$

si et seulement si $-2x-3y+11=0$

si et seulement si $2x+3y-11=0$

Justification des deux dernières lignes :

Une égalité est équivalente à n'importe quelle autre égalité obtenue en multipliant les deux membres par un même réel non nul.
Ici, nous pouvons multiplier les deux membres de l'égalité par – 1, ceci dans le but d'obtenir une égalité avec le moins possible de signes –. On considère que l'égalité obtenue est plus « jolie », quoique le côté esthétique soit très subjectif en mathématiques.

$$-2x-3y+11=0$$
$$\downarrow$$
$$2x+3y-11=0$$

Une équation cartésienne de ***D*** s'écrit $2x+3y-11=0$.

$\boxed{11}$

D : $x+2y+3=0$

1°) Déterminons l'équation réduite de ***D***.

L'équation $x+2y+3=0$ est successivement équivalente à

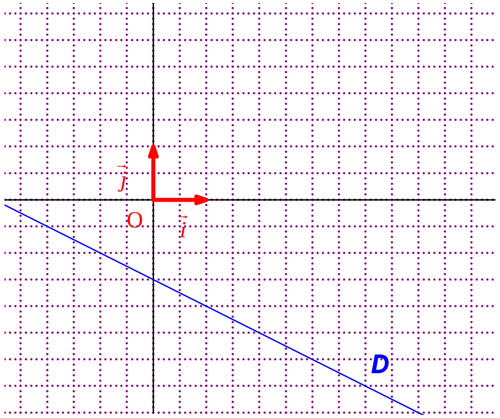
$2y=-x-3$

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

D a donc pour équation réduite $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Il s'agit d'une transformation d'écriture et non d'une résolution d'équation.

2°) Tracé de ***D***.



On dresse un tableau de deux valeurs.

x	-1	3
y	-1	-3

3°) Déterminons une équation cartésienne de la droite ***D'*** passant par le point A(1 ; – 3) parallèle à ***D***.

Même rédaction qu'à l'exercice $\boxed{6}$.

On passe par l'équation réduite de ***D*** qui a été déterminée au 1°).
On privilégie l'usage de la formule du cours.

D' : $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

D' : $x+2y+5=0$

$\boxed{12}$ **Solution détaillée :**

$\mathcal{D}$: $x+2y-3=0$

$\mathcal{D}$ ∩ (Ox) = { A }

$\mathcal{D}$ ∩ (Oy) = { B }

Ces deux écritures se lisent :

« L'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de l'axe (Ox) est l'ensemble constitué du point A. »

« L'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de l'axe (Oy) est l'ensemble constitué du point B. »

{ A } et { B } sont des singletons (ensembles constitués d'un seul élément).

Remarque de notations :

• (Ox) désigne l'axe des abscisses.

• (Oy) désigne l'axe des ordonnées.

Calculons les coordonnées de A et B.

• A ∈ (Ox) donc $y_A=0$.
De plus, A ∈ $\mathcal{D}$ donc $x_A-2y_A+3=0$ soit $x_A-3=0$ d'où $x_A=3$.

A(3 ; 0)

• B ∈ (Oy) donc $x_B=0$.

De plus, B ∈ $\mathcal{D}$ donc $2y_B-3=0$ d'où $y_B=\frac{3}{2}$.

$B\left(0\,;\frac{3}{2}\right)$

On peut vérifier les résultats en traçant la droite $\mathcal{D}$ sur un logiciel de géométrie dynamique.

$\boxed{13}$

$\mathcal{D}$: $x-3y+5=0$

1°) Calculons l'ordonnée du point A de $\mathcal{D}$ qui a pour abscisse – 1.

On a : $x_A=-1$.

De plus, A ∈ $\mathcal{D}$ donc $x_A-3y_A+5=0$ d'où $y_A=\frac{4}{3}$.

$A\left(-1\,;\frac{4}{3}\right)$

2°) Calculons l'abscisse du point B de $\mathcal{D}$ qui a pour ordonnée 2.

On a : $y_B=2$.
De plus, B ∈ $\mathcal{D}$ donc $x_B-3y_B+5=0$ donc $x_B=1$.

B(1 ; 2)

$\boxed{14}$ On veillera à bien rédiger.

Solution détaillée :

Déterminons l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point A(1 ; 2) et de coefficient directeur 3.

1ère méthode : plus longue donc à éviter

Le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ est 3.
L'équation réduite de $\mathcal{D}$ s'écrit donc $y=3x+p$ avec $p\in\mathbb{R}$.
A ∈ $\mathcal{D}$ donc $y_A=3x_A+p$ d'où $p=2-3\times1$ soit $p=-1$.

Donc $\mathcal{D}$ a pour équation réduite $y=3x-1$.

2e méthode : plus rapide donc à privilégier

On utilise la propriété du cours :

La droite passant par un point $A(x_A\,;y_A)$ et de coefficient directeur m a pour équation $\boldsymbol{y=m(x-x_A)+y_A}$.

$\mathcal{D}$ a pour équation $y=3(x-1)+2$ soit $y=3x-1$.

15 Ne pas transformer les équations cartésiennes des droites D et D' fournies par l'énoncé en équations réduites (transformer en équations réduites ferait apparaître des dénominateurs ce qui ne serait pas particulièrement agréables).
On détermine un vecteur directeur de D et D' en utilisant la formule du cours.
On démontre ensuite que ces vecteurs directeurs sont colinéaires (en calculant leur déterminant).

Solution détaillée :

D : $6x-9y+11=0$
D' : $4x-6y-5=0$

Déterminons si les droites D et D' sont parallèles.

On abandonne le réflexe « coefficient directeur » pour s'orienter vers les « vecteurs directeurs » et la colinéarité.
En effet, pour utiliser le coefficient directeur, il faudrait d'abord transformer les équations cartésiennes en équations réduites.

On sait que le vecteur $\vec{u}\,(9\,;\,6)$ est un vecteur directeur de D et que $\vec{u}\,'(6\,;\,4)$ est un vecteur directeur de D'.

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 9\times 4-6\times 6$$
$$=36-36$$
$$=0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont colinéaires.
Par suite, $D\,//\,D'$.

16 **Étude d'une famille de droites dépendant d'un paramètre**

D_m : $(m-3)x+5my+4m+3=0 \quad (m\in\mathbb{R})$

On dit que m est un **paramètre** (chercher la signification du mot « paramètre » en mathématiques).

Il s'agit d'une famille de droites dépendant d'un paramètre m.

L'équation cartésienne de la droite D_m donnée dans l'énoncé est de la forme $ax+by+c=0$ avec $\boxed{a=m-3}$, $\boxed{b=5m}$, $\boxed{c=4m+3}$.
Les coefficients de l'équation cartésienne sont exprimés en fonction du paramètre m.

1°) **Déterminons m tel que D_m passe par le point A(– 2 ; 1).**

On utilise un raisonnement par chaîne d'équivalences (présence de « si et seulement si »).

$\text{A}\in D_m$ si et seulement si $(m-3)\times(-2)+5m\times 1+4m+3=0$
si et seulement si $-2m+6+5m+4m+3=0$
si et seulement si $7m=-9$
si et seulement si $m=-\dfrac{9}{7}$

Il s'agit d'une famille de droites dépendant d'un paramètre m.

L'équation cartésienne de la droite D_m donnée dans l'énoncé est de la forme $ax+by+c=0$ avec $\boxed{a=m-3}$, $\boxed{b=5m}$, $\boxed{c=4m+3}$.
Les coefficients de l'équation cartésienne sont exprimés en fonction du paramètre m.

2°) **Démontrons que toutes les droites D_m passent par le point K(1 ; – 1).**

Attention, au sens du raisonnement. « Si K appartient à la droite D_m, alors ses coordonnées vérifie l'équation de la droite » n'est pas ce qu'on utilise.

$$(m-3)x_{\text{K}}+5my_{\text{K}}+4m+3=m-3-5m+4m+3$$
$$=0$$

Quel que soit $m\in\mathbb{R}$, les coordonnées de K vérifient l'équation de la droite D_m.

On en déduit que $\text{K}\in D_m$ pour tout réel m.

17 **Résolutions de systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues**

On commencera par calculer le déterminant.

Pour certains systèmes, il faut commencer par transformer un peu les équations pour écrire le système sous la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

On utilise ensuite plutôt la méthode des multiplicateurs.

(I) $(-5\,;9)$; vérifier grâce à la calculatrice

(II) Multiplier la première ligne par 10 puis la deuxième ligne par 6 ce qui donne un système sans dénominateur.

$\begin{cases} 2x+5y=-10 \\ 3x+2y=18 \end{cases}$

(10 ; – 6). Vérifier grâce à la calculatrice.

(III) $\left(\frac{16}{5}\,;-\frac{3}{5}\right)$; vérification sur la calculatrice.

(IV) $\left(\frac{4\sqrt{2}+1}{3}\,;\frac{4-\sqrt{2}}{3}\right)$ (<u>traits de fraction à la règle</u>).

Le fait que l'on résolve dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas mentionné dans l'ensemble des solutions.

Solution détaillée :

$\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble des couples de réels.

• (I) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 7x+4y=1 \end{cases}$

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.
Le déterminant de (I) est égal à :

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=5\times4-7\times3=20-21=-1$$

$D\neq0$ donc le système (I) admet un unique couple solution.

(I) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 7x+4y=1 \end{cases} \left|\begin{matrix} \times(-4) \\ \times 3 \end{matrix}\right. \left|\begin{matrix} \times 7 \\ \times(-5) \end{matrix}\right.$

pour trouver x pour trouver y

$\begin{cases} x=-5 \\ y=9 \end{cases}$

L'ensemble des solutions du système (I) est $S=\{(-5\,;9)\}$.

• (II) $\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=-1 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3 \end{cases}$

(II) est équivalent au système (II') $\begin{cases} 2x+5y=-10 \\ 3x+2y=18 \end{cases}$.

Le déterminant du système est égal à

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2\times2-3\times5=-9$$

$D\neq0$ donc le système (II') admet un unique couple solution.

(II') $\begin{cases} 2x+5y=-10 \\ 3x+2y=18 \end{cases} \left|\begin{matrix} \times(-2) \\ \times 5 \end{matrix}\right. \left|\begin{matrix} \times 3 \\ \times(-2) \end{matrix}\right.$

$\begin{cases} 11x=110 \\ 11y=-66 \end{cases}$

$\begin{cases} x=10 \\ y=-6 \end{cases}$

L'ensemble des solutions du système (II) est $S=\{(10\,;-6)\}$.

Le calcul du déterminant et la résolution seraient fastidieux sur le système initial à cause des calculs de fractions.

• (III) $\begin{cases} 2(x-4)=y-1 \\ x+1=3(y+2) \end{cases}$

(III) est équivalent au système (III') $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x-3y=5 \end{cases}$.

Le déterminant du système est égal à : $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-1\times(-1)=-5$.

$D\neq0$ donc le système (III) admet un unique couple solution.

(III') $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x-3y=5 \end{cases} \left|\begin{matrix} \times 3 \\ \times(-1) \end{matrix}\right. \left|\begin{matrix} \times 1 \\ \times(-2) \end{matrix}\right.$

$\begin{cases} 5x=16 \\ 5y=-3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{16}{5} \\ y = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (III) est $S = \left\{\left(\dfrac{16}{5}\,;-\dfrac{3}{5}\right)\right\}$.

On ne peut calculer le déterminant du système III sur la forme de base.
En effet, pour pouvoir calculer le déterminant, le système doit être mis sous la forme d'un système linéaires avec les équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$.

• (IV) $\begin{cases} x\sqrt{2}+y=4 \\ -x+y\sqrt{2}=-1 \end{cases}$

Le déterminant du système est égal à $D=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}-(-1)\times1=2+1=3$.

$D\neq0$ donc le système (IV) admet un unique couple solution.

(IV) $\begin{cases} x\sqrt{2}+y=4 \\ -x+y\sqrt{2}=-1 \end{cases} \begin{array}{|l|l} \times\sqrt{\mathbf{2}} & \times\mathbf{1} \\ \times(-\mathbf{1}) & \times\sqrt{\mathbf{2}} \end{array}$

$$\begin{cases} 3x=4\sqrt{2}+1 \\ 3y=4-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{4\sqrt{2}+1}{3} \\ y=\dfrac{4-\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (IV) est $S=\left\{\left(\dfrac{4\sqrt{2}+1}{3}\,;\dfrac{4-\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ On utilise un changement d'inconnue afin de se ramener à un système linéaire.

a) $(\sqrt{2}\,;1)$; $(\sqrt{2}\,;-1)$; $(-\sqrt{2}\,;1)$; $(-\sqrt{2}\,;-1)$ b) $(16\,;1)$ c) $\left(\dfrac{5}{9}\,;-10\right)$

Changements d'inconnues :

a) changement d'inconnues : $X=x^2$ et $Y=y^2$
b) changement d'inconnues : $X=\sqrt{x}$ et $Y=\sqrt{y}$
c) changement d'inconnues : $X=\dfrac{1}{x}$ et $Y=\dfrac{1}{y}$
d) changement d'inconnues : $X=|x|$ et $Y=|y|$.

Solution détaillée :

Méthode :

Aucun des trois systèmes n'est linéaire (le système du a) à cause de la présence de carrés, le système du b) à cause de la présence de racines carrées, le système du c) à cause de la présence d'inverses).

Le cours sur les systèmes linéaires ne s'applique pas. Pour chaque système, on effectue un changement d'inconnues adéquat qui nous permet de s'y ramener à un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Schématiquement, on passe du système initial (I) à un système linéaire (II) et ensuite on revient au système (I).

La calculatrice Casio collège ne permet pas de résoudre ces systèmes car ils ne sont pas linéaires.
En revanche, il est possible d'utiliser un logiciel de calcul formel.

a) **Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (I) $\begin{cases} 7x^2-9y^2=5 \\ -3x^2+5y^2=-1 \end{cases}$.**

Ce n'est pas un système linéaire (à cause des carrés).

On pose $X=x^2$ et $Y=y^2$ (changement d'inconnues).

(I) s'écrit (II) $\begin{cases} 7X-9Y=5 \\ -3X+5Y=-1 \end{cases}$.

Le système (II) est un système linéaire.
On calcule le déterminant de (II).

$D=\begin{vmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=7\times5-(-3)\times(-9)=35-27=8$

$D\neq0$ donc le système (II) admet un unique couple solution.

$\begin{cases} 7X-9Y=5 \\ -3X+5Y=-1 \end{cases} \begin{array}{|l|l} \times\mathbf{5} & \times\mathbf{3} \\ \times\mathbf{9} & \times\mathbf{7} \end{array}$

$$\begin{cases} X=2 \\ Y=1 \end{cases}$$

Or $X=x^2$ et $Y=y^2$.

Donc (I) est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} x^2=2 \\ y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{2} \\ y=1 \quad \text{ou} \quad y=-1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (I) est $S=\left\{\left(\sqrt{2}\,;1\right);\left(\sqrt{2}\,;-1\right);\left(-\sqrt{2}\,;1\right);\left(-\sqrt{2}\,;-1\right)\right\}$.

Le système (I) admet 4 couples solutions.

b) **Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (I) $\begin{cases} \sqrt{x}+4\sqrt{y}=8 \\ 3\sqrt{x}-5\sqrt{y}=7 \end{cases}$.**

Ce n'est pas un système linéaire (à cause des carrés).

On pose $X=\sqrt{x}$ et $Y=\sqrt{y}$.

(I) s'écrit (II) $\begin{cases} X+4Y=8 \\ 3X-5Y=7 \end{cases}$

Le système (II) est un système linéaire.

On calcule le déterminant de (II).

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-17$$

$D\neq 0$ donc le système (II) admet un unique couple solution.

(II) $\begin{cases} X+4Y=8 \\ 3X-5Y=7 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times\mathbf{5} \\ \times\mathbf{4} \end{matrix} \right| \begin{matrix} \times\mathbf{3} \\ \times(-\mathbf{1}) \end{matrix}$

$$\begin{cases} 17X=68 \\ 17Y=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X=4 \\ Y=1 \end{cases}$$

Or $X=\sqrt{x}$ et $Y=\sqrt{y}$.
Donc (I) est successivement équivalent à

$$\begin{cases} \sqrt{x}=4 \\ \sqrt{y}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=16 \\ y=1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (I) est $S=\left\{\left(16\,;1\right)\right\}$.

Le système (I) admet 1 couple solution.

c) **Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (I) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}=2 \end{cases}$.**

Ce n'est pas un système linéaire (à cause des carrés).

On pose $X=\dfrac{1}{x}$ et $Y=\dfrac{1}{y}$.

(I) s'écrit (II) $\begin{cases} 3X+4Y=5 \\ X-2Y=2 \end{cases}$.

Le système (II) est un système linéaire.

On calcule le déterminant de (II).

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-10$$

$D\neq 0$ donc le système (II) admet un unique couple solution.

(II) $\begin{cases} 3X+4Y=5 \\ X-2Y=2 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times\mathbf{1} \\ \times\mathbf{2} \end{matrix} \right| \begin{matrix} \times\mathbf{1} \\ \times(-\mathbf{3}) \end{matrix}$

$$\begin{cases} 5X=9 \\ 10Y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X=\dfrac{9}{5} \\ Y=-\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Or $X=\dfrac{1}{x}$ et $Y=\dfrac{1}{y}$.

(I) est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{9}{5} \\ \dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{9} \\ y=-10 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (I) est $S=\left\{\left(\dfrac{5}{9}\,;-10\right)\right\}$.

Le système (I) admet 1 couple solution.

Indication : effectuer le changement d'inconnues $X=|\,x\,|$ et $Y=|\,y\,|$.

d) Résolvons le système (I) $\begin{cases} 3|\,x\,|-2|\,y\,|=-5 \\ 5|\,x\,|+|\,y\,|=9 \end{cases}$.

On pose $X=|\,x\,|$ et $Y=|\,y\,|$ (changement d'inconnues).

Le système (I) s'écrit alors (II) $\begin{cases} 3X-2Y=-5 \\ 5X+Y=9 \end{cases}$.

Le système (II) est un système linéaire de deux équations à deux inconnues (on notera que le système (I) n'est pas un système linéaire à cause des valeurs absolues).
On calcule le déterminant (voir rappel de la définition à la fin du corrigé).

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=3\times1-5\times(-2)=3+10=13\neq0$$

Le déterminant est non nul donc le système (II) admet un unique couple solution.
Pour trouver ce couple, on peut utiliser la méthode par combinaison ou par substitution.

Résolvons le système (II) par combinaisons linéaires.

Pour trouver X :

On garde la 1ère équation et on multiplie la 2e équation par 2 (pour éliminer les Y).

$$\begin{cases} 3X-2Y=-5 \\ 10X+2Y=18 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre les deux équations.
$13X=13$
$X=1$

Pour trouver Y :

On multiplie la 1ère équation par – 5 et la 2e équation par 3 (pour éliminer les X).

$$\begin{cases} -15X+10Y=25 \\ 15X+3Y=27 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre les deux équations.

$13Y=52$
$Y=4$

On peut aussi remplacer X par 1 dans la 1ère équation du système II ($3\times1-2Y=-5$ soit $3-2Y=-5$, $-2Y=-8$ d'où $Y=4$).

Méthode des multiplicateurs :

$$\begin{cases} 3X-2Y=-5 \\ 5X+Y=9 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \times1 \\ \times2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} \times(-5) \\ \times3 \end{array}$$

pour trouver X pour trouver Y

Pour trouver X, on multiplie la 1ère équation par 1 et on multiplie la 2e équation par 2 (pour éliminer les Y).
On additionne membre à membre.
Pour trouver Y, on multiplie la 1ère équation par – 5 et la 2e équation par 3 (pour éliminer les X).
On additionne membre à membre.

On obtient ainsi le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} 13X=13 \\ 13Y=52 \end{cases}$$

La solution de (II) est le couple (1 ; 4).

On revient au système (I).

On sait que $X=|\,x\,|$ et $Y=|\,y\,|$.

Donc le système (I) est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} |\,x\,|=1 \\ |\,y\,|=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \text{ ou } x=-1 \\ y=4 \text{ ou } y=-4 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (I) est donc $S=\{(1\,;4)\,;(1\,;-4)\,;(-1\,;4)\,;(-1\,;-4)\}$.
Le système (I) admet 4 couples solutions.

• On peut résoudre le système (II) par substitution. Mieux vaut cependant s'habituer à résoudre les systèmes linéaires par combinaisons.

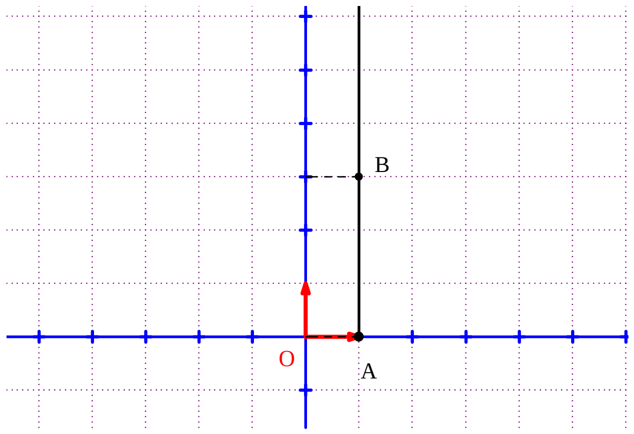
• On peut résoudre le système (I) à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

19

A$(1\,;0)$ B$(1\,;3)$

Caractérisons la demi-droite $[\text{AB})$ par un système de conditions portant sur les coordonnées $(x\,;\,y)$ d'un point.

On commence par faire un graphique soigné.



Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\text{M} \in [\text{AB})$ si et seulement si $\begin{cases} \text{M} \in (\text{AB}) \\ \text{M est au-dessus ou sur l'axe des abscisses} \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x = 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

La demi-droite [AB) est caractérisée par le système $\begin{cases} x = 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$.

20

$D:\ 3x-4y+7=0$

$D':\ 2x+5y-1=0$

• **Déterminons si D et D' sont sécantes.**

D'après le cours :

• le vecteur $\vec{u}(4\,;3)$ est un vecteur directeur de D ;
• le vecteur $\vec{u}'(-5\,;2)$ est un vecteur directeur de D'.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires (car leur déterminant vaut 23 et est donc non nul).

Donc D et D' sont sécantes en un point K.

• **Calculons les coordonnées de K.**

Les coordonnées du point K sont les solutions du système $\begin{cases} 3x-4y+7=0 \\ 2x+5y-1=0 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

On peut le résoudre « à la main » (la méthode la plus simple ici est la substitution) ou si l'on est fainéant – ou plutôt astucieux – grâce à la calculatrice (grâce à l'application de résolution des systèmes linéaires PlySmlt2).

1ère méthode :

On résout le système « à la main » en utilisant la méthode des multiplicateurs.

$$\begin{cases} 3x-4y+7=0 \\ 2x+5y-1=0 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times 5 \\ \times 4 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \times(-2) \\ \times 3 \end{matrix}$$

On obtient les équations $5(3x-4y+7)+4(2x+5y-1)=0$ et $-2(3x-4y+7)+3(2x+5y-1)=0$.

$$\begin{cases} 23x+31=0 \\ 23y-17=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{31}{23} \\ y = \dfrac{17}{23} \end{cases}$$

2e méthode :

On résout le système à l'aide de la calculatrice.

Pour résoudre le système à l'aide de la calculatrice, on doit d'abord réécrire le système sous la forme
$\begin{cases} 3x-4y=-7 \\ 2x+5y=1 \end{cases}$.

On obtient $x=-\dfrac{31}{23}$ et $y=\dfrac{17}{23}$.

Donc $\text{K}\left(-\dfrac{31}{23}\,;\dfrac{17}{23}\right)$.

$\boxed{\textbf{20}}$

Les coordonnées du point K sont les solutions du système $\begin{cases} x-y+7=0 \\ 11x+2y+6=0 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

On peut le résoudre « à la main » (la méthode la plus simple ici est la substitution) ou si l'on est fainéant – ou plutôt astucieux – grâce à la calculatrice de collège Casio.

1ère méthode :

On résout le système « à la main » en utilisant la méthode des multiplicateurs.

$$\begin{cases} x-y+7=0 \\ 11x+2y+6=0 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \times 2 \\ \times 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} \times(-11) \\ \times 1 \end{array}$$

On obtient les équations $2(x-y+7)+(11x+2y+6)=0$ et $-11(x-y+7)+(11x+2y+6)=0$.

$$\begin{cases} 13x+20=0 \\ 13y-71=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{20}{13} \\ y=\dfrac{71}{13} \end{cases}$$

2e méthode :

On résout le système à l'aide de la calculatrice.

Pour résoudre le système à l'aide de la calculatrice, on doit d'abord réécrire le système sous la forme
$\begin{cases} x-y=-7 \\ 11x+2y=-6 \end{cases}$.

On obtient $x=\dfrac{20}{13}$ et $y=-\dfrac{71}{13}$.

Donc $\text{K}\left(\dfrac{20}{13}\,;-\dfrac{71}{13}\right)$.