La suite de Syracuse

Une suite de Syracuse est une suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 \in \mathbb{N}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}.$$

1°) Recopier et compléter le tableau suivant des termes de suites de Syracuse définies par des différents termes initiaux.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
u_n	4																	
u_n	5																	
u_n	6																	
u_n	7																	

Ce tableau signifie que dans la deuxième ligne, on prend $u_0 = 4$, dans la troisième ligne on prend $u_0 = 5$ etc.

2°) Émettre une conjecture :

« À partir d'un certain rang se reproduit la séquence de termes . . . . »

Information :

Cette conjecture a été formulée en 1928 par le mathématicien allemand Lothar Collatz, puis présentée à un colloque de l'université de Syracuse (état de New-York) en 1958. Elle a fait l'objet de nombreuses recherches, mais aucun mathématicien ne l'a, à ce jour, prouvée ou infirmée.

3°) Rédiger un algorithme en langage naturel qui fait saisir le terme initial d'une suite de Syracuse ainsi qu'un entier naturel N et qui affiche les N premiers termes de la suite.

4°) Programmer l'algorithme précédent soit sur calculatrice soit sur Algobox.
Écrire le programme sur la copie (indiquer le modèle de calculatrice s'il s'agit d'un programme sur calculatrice).

5°) Le temps de vol d'une suite de Syracuse représente le rang du premier terme égal à 1.
Modifier l'algorithme du 3°) afin qu'il affiche le temps de vol de la suite au lieu des termes.

Une piste : utiliser une boucle « Tantque ».
Programmer cet algorithme et écrire sur la copie le nouveau programme.

6°) L'altitude maximale est le plus grand terme de la suite.
Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche également l'altitude maximale de la suite.

7°) Établir un record de temps de vol et d'altitude maximale.

Facultatif : Faire des recherches sur la conjecture de Syracuse.

Corrigé

1°) **Recopier et compléter le tableau suivant des termes de suites de Syracuse définies par des différents termes initiaux.**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
u_n	4	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**
u_n	5	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**
u_n	6	**3**	**10**	**5**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**
u_n	7	**22**	**11**	**34**	**17**	**52**	**26**	**13**	**40**	**20**	**10**	**5**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**	**4**

2°) **Émettre une conjecture :**

« À partir d'un certain rang se reproduit la séquence de termes **4, 2, 1**.»

3°) **Rédiger un algorithme en langage naturel qui fait saisir le terme initial d'une suite de Syracuse ainsi qu'un entier naturel N (set qui affiche les N premiers termes de la suite.**

Entrée :
Saisir u (valeur du terme initiale de la suite)
Saisir N

Traitement et sorties :
Afficher u
Pour i allant de 1 à N **Faire**
  Si $\mathrm{E}\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{u}{2}$
    alors u prend la valeur $\frac{u}{2}$
    Sinon u prend la valeur $3u+1$
  FinSi
  Afficher u
FinPour

Deux remarques :

- Le fonctionnement de la boucle suppose que $\mathrm{N} \geqslant 2$ (attention, à bien mettre N – 1 et non N).
- Si $\mathrm{N}=0$, on aura uniquement le terme initial qui s'affichera (la boucle ne tourne pas).

4°) **Programmer l'algorithme précédent soit sur calculatrice soit sur Algobox.**

```
: Prompt U
: Prompt N
: Disp U
: For (I,1, N)
: If int(U/2) = U/2
: Then U/2 → U/2
: Else 3U+1 → U
: End
: Disp U
: End
```

Sur calculatrice, on peut introduire des « Pause » pour avoir le temps de voir les termes.

Sur Algobox, la partie entière est notée Floor.

5°) Le temps de vol d'une suite de Syracuse représente le rang du premier terme égal à 1.
Modifier l'algorithme du 3°) afin qu'il affiche le temps de vol de la suite au lieu des termes.

Une piste : utiliser une boucle « Tantque ».
Programmer cet algorithme et écrire sur la copie le nouveau programme.

6°) L'altitude maximale est le plus grand terme de la suite.
Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche également l'altitude maximale de la suite.

7°) **Établir un record de temps de vol et d'altitude maximale.**

Les suites de Syracuse

Définition :

N étant un entier naturel non nul, on appelle *suite de Syracuse* de N la suite (u_n) d'entiers naturels définie de la manière suivante :

- Le premier terme est égal à N : $u_0 = N$.

- On passe d'un terme u_n au terme suivant u_{n+1} de la manière suivante :

  Si u_n est pair, on le divise par 2 : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$;

  Si u_n est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1 : $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Exemples :

Suite de Syracuse de 11 : 11 – 34 – 17 – 52 – 26 – 13 – 40 – 20 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1 – 4 – 2 – 1

Suite de Syracuse de 32 : 32 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1 – 4 – 2 – 4 – 2 – 1 – 4 – 2 – 1 – 4 – 2 – 1 – 4 – 2 – 1

Vocabulaire :

On constate que lorsqu'on progresse à l'intérieur d'une suite de Syracuse les termes peuvent augmenter, puis diminuer, puis augmenter à nouveau, etc.

Cela fait penser à un planeur qui monte ou descend au gré des vents.

D'où le vocabulaire suivant :
- on appelle *altitude maximale* la valeur du plus grand terme d'une suite de Syracuse.
- on appelle *durée du vol* la plus petite (lorsqu'elle existe) valeur de n pour laquelle $u_n = 1$.
- on appelle *durée du vol en altitude* la plus petite valeur de n pour laquelle $u_{n+1} < N$.

Exemple avec la suite de Syracuse de 11 :

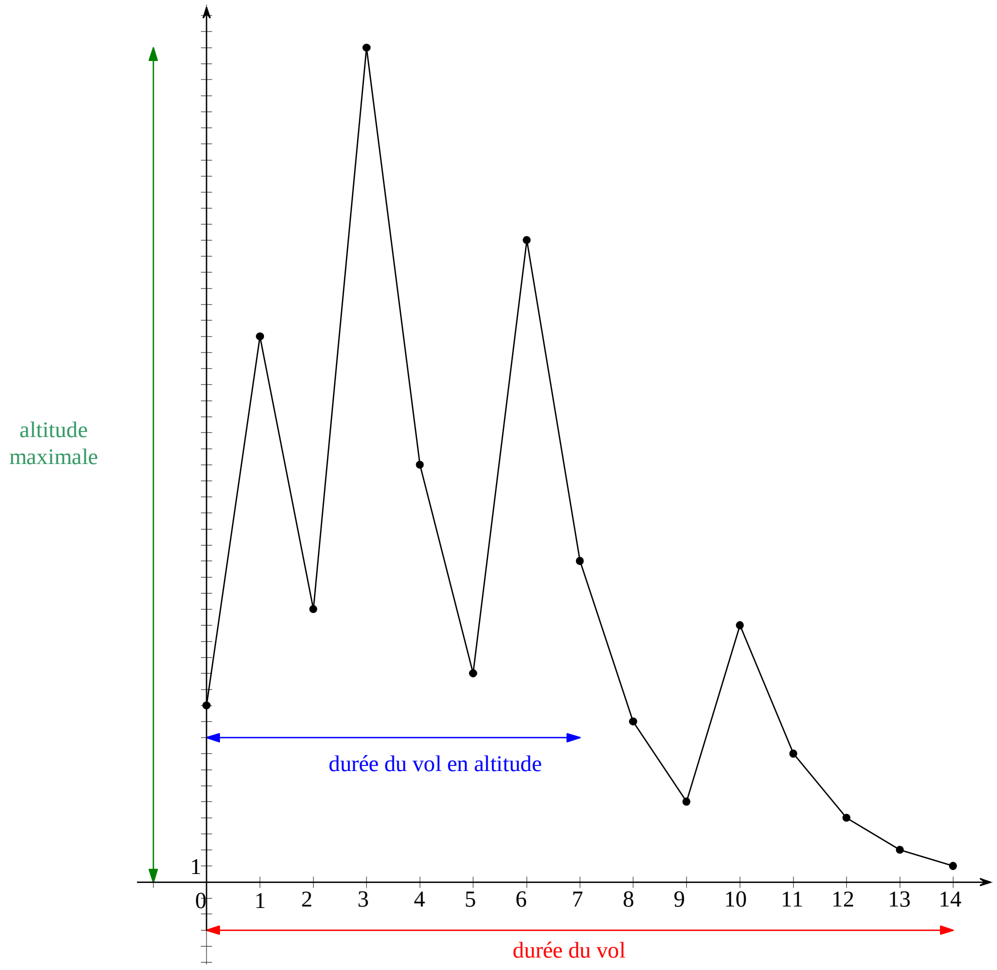
11 – 34 – 17 – 52 – 26 – 13 – 40 – 20 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1

L'altitude maximale est 52.

La durée de vol est 14.

La durée de vol en altitude est 7.

Ces trois nombres se visualisent facilement en représentant graphiquement la suite de Syracuse de 11 par des points d'abscisse n et d'ordonnée u_n :



Propriété :

S'il existe un rang p tel que $u_p = 1$, alors la suite de Syracuse est périodique à partir de l'indice p.

Démonstration :

On suppose qu'il existe un indice p tel que $u_p = 1$.

u_p est impair donc $u_{p+1} = 3u_p + 1$ d'où $u_{p+1} = 4$.

u_p est pair donc $u_{p+2} = \frac{1}{2}u_{p+1}$ d'où $u_{p+2} = 2$.

u_{p+2} est pair donc $u_{p+3} = \frac{1}{2}u_{p+2}$ d'où $u_{p+3} = 1$.

On a donc $u_{p+3} = u_p$. Les termes après u_{p+3} sont donc 4 – 2 – 1 – 4 – 1 …
Le cycle 1 – 4 – 2 revient périodiquement à partir de l'indice *p*.

Plus précisément, soit *n* un entier au moins égal à *p*.
- Si $n = p + 3k$ où $k \in \mathbb{N}$, alors $u_p = 1$.
- Si $n = p + 3k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$, alors $u_p = 4$.
- Si $n = p + 3k + 2$ où $k \in \mathbb{N}$, alors $u_p = 2$.

Le tableau ci-dessous donne les vingt premiers termes des dix premières suites de Syracuse pour les entiers *N* de 1 à 10.

$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$	$N = 10$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	1	10	2	16	3	22	4	28	5
2	4	5	1	8	10	11	2	14	16
1	2	16	4	4	5	34	1	7	8
4	1	8	2	2	16	17	4	22	4
2	4	4	1	1	8	52	2	11	2
1	2	2	4	4	4	26	1	34	1
4	1	1	2	2	2	13	4	17	4
2	4	4	1	1	1	40	2	52	2
1	2	2	4	4	4	20	1	26	1
4	1	1	2	2	2	10	4	13	4
2	4	4	1	1	1	5	2	40	2
1	2	2	4	4	4	16	1	20	1
4	1	1	2	2	2	8	4	10	4
2	4	4	1	1	1	4	2	5	2
1	2	2	4	4	4	2	1	16	1
4	1	1	2	2	2	1	4	8	4
2	4	4	1	1	1	4	2	4	2
1	2	2	4	4	4	2	1	2	1
4	1	1	2	2	2	1	4	1	4

Il semblerait que quelle que soit la valeur de *N*, il existe un indice *p* tel que $u_p = 1$.
Cette conjecture est connue sous le nom de *conjecture de Syracuse* ou conjecture de Collatz.
Cette conjecture a été formulée pour la première fois en 1928 par le mathématicien allemand Collatz (1910 - 1990).
Les ordinateurs les plus puissants ont calculé un très grand nombre de termes pour des milliards de valeurs de *N* (jusqu'à $N = 5 \times 260 = 5\ 764\ 607\ 523\ 034\ 230\ 000$) mais jusqu'à aujourd'hui aucun contre-exemple n'a été trouvé : un des termes de la suite est toujours égal à l.
Les plus grands mathématiciens du monde entier (dont ceux de l'université de Syracuse aux États-Unis) ont cherché en vain à prouver cette conjecture (ou son contraire).
Selon le mathématicien hongrois Paul Erdös (1913–1996), « les mathématiques ne sont pas encore suffisamment mûres pour résoudre un tel problème ».

Celui qui prouvera soit que la conjecture de Syracuse est vraie, soit qu'elle est fausse, rentrera dans le Panthéon des mathématiciens et son nom sera vénéré jusqu'à la fin des temps. Affaire à suivre...