Exercices sur les fonctions homographiques

1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction homographique *f*.
Effectuer la recherche en rédigeant sous la forme d'une chaîne d'équivalences en rédigeant selon le modèle suivant : « $f(x)$ existe si et seulement si …».
Conclure en écrivant une égalité d'ensemble : $\mathcal{D}_f = ...$.

1°) $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x-1}$	2°) $f : x \mapsto \dfrac{3}{x-4}$	3°) $f : x \mapsto 3+\dfrac{2}{x}$	4°) $f : x \mapsto 1-\dfrac{3}{x+1}$	5°) $f : x \mapsto 2-\dfrac{x+1}{x-3}$

2 Mettre sous forme canonique (décomposition canonique) de la fonction homographique *f*.

1°) $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{x}$	2°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$	3°) $f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{4x+5}$	4°) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{2x-1}$

3 Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-1$.

1°) Identifier l'enchaînement de fonctions de référence qui conduit de *x* à $f(x)$.

2°) En utilisant des inégalités, étudier le sens de variation de *f* sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ (on utilisera la méthode des inégalités successives, méthode algorithmique).

• On cherche à déterminer le sens de variation de *f* sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par une méthode algébrique.

Soit *a* et *b* deux réels quelconques de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ tels que $a<b$.
On considère les inégalités suivantes :

$-1<a<b \quad (1)$

$0<a+1<b+1 \quad (2)$

$\dfrac{1}{a+1}>\dfrac{1}{b+1} \quad (3)$

$\dfrac{1}{a+1}-1>\dfrac{1}{b+1}-1 \quad (4)$.

Justifier :
- le passage de l'inégalité (1) à l'inégalité (2) ;
- le passage de l'inégalité (2) à l'inégalité (3) ;
- le passage de l'inégalité (3) à l'inégalité (4).

À l'aide du résultat, donner le sens de variation de *f* sur $]-1\,;+\infty[$.

• Déterminer par une méthode similaire le sens de variation de *f* sur $]-\infty\,;-1[$.
Reprendre la même démarche en l'adaptant.
On commencera par la phrase suivante à recopier :
« Soit *a* et *b* deux réels quelconques de l'intervalle $]-\infty\,;-1[$ tels que $a<b$. »
Puis partir de l'inégalité $a<b<-1 \ (1)$.
Justifier chaque passage d'une inégalité à la suivante (mêmes étapes, même justification).

3°) Faire un tableau de valeurs de *f* sur l'intervalle $[-0,5\,;1]$ avec un pas de 0,1.
Effectuer le tracé de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de *f* sur l'intervalle $[-0,5\,;1]$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J) (prendre 10 centimètres ou 10 « gros carreaux » pour unité graphique).

4 On considère les fonctions $f : x \mapsto 3+\dfrac{5}{x-2}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.
2°) Étudier les variations de *f* (c'est-à-dire étudier le sens de variation de *f* sur les intervalles qui constituent $\mathcal{D}$) ; dresser son tableau de variations.
Il n'y a rien à mettre dans le tableau.
3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (prendre un centimètre ou un « gros carreau » pour unité graphique).
Recopier et compléter à l'aide de la calculatrice le tableau de valeurs ci-dessous (arrondir certains résultats au centième).

x	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$													

Tracer $\mathcal{C}$.

4°) Sur le graphique précédent, tracer la droite *D* d'équation $y=x-3$.
Déterminer par le calcul les coordonnées des points A et B où $\mathcal{C}$ rencontre *D*.
On pourra utiliser l'égalité : $(x-1)(x-7)=x^2-8x+7$.

5 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont égales à la fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x}$? Justifier par le calcul.

1°) $x \mapsto \dfrac{-x-1}{-x}$ 2°) $x \mapsto 1+\dfrac{1}{x}$ 3°) $x \mapsto \dfrac{2x+1}{2x}$ 4°) $x \mapsto \dfrac{x-1}{-x}$

6 Un fournisseur propose à un commerçant un article à 0,5 € pièce. S'il en commande plus de 20, chaque article à partir du 21^e^ est facturé de 0,45 € et 3 articles supplémentaires sont offerts*. Le commerçant décide de commander *x* articles avec $21 \leqslant x \leqslant 40$ et de les revendre 0,8 € pièce.

* Il faut comprendre que :
- les 20 premiers articles coûtent 0,5 € pièce
- les articles supplémentaires coûtent 0,45 € pièce.

1°) Exprimer en fonction de *x* le montant de sa facture, le nombre d'articles reçus et le bénéfice total réalisé par le commerçant (dans l'hypothèse où il revend la totalité des articles).
2°) Démontrer que le bénéfice moyen par article vendu est donné par la fonction homographique B définie sur $[21\,;40]$ par : $\mathrm{B}(x)=\dfrac{0,35x+1,4}{x+3}$.
3°) Le commerçant peut-il réaliser en moyenne 36 centimes de bénéfice par articles ?

$\boxed{7}$ On rappelle la propriété :

Si a, b, c sont trois réels non nuls et si un nombre est de la forme $\frac{ac}{bc}$, alors on peut aussi l'écrire $\frac{a}{b}$.

1°) Pour chaque cas, dire si on peut appliquer la règle et pourquoi :

a) $\frac{a\times b+5}{a\times b+7}$

b) $\frac{3(x-1)}{3x}$

c) $\frac{2+7x}{7x}$

2°) Quand la règle s'applique, simplifier l'expression.

$\boxed{8}$ On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{2x-2}{x+1}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Démontrer que pour tout réel $x \in \mathcal{D}$, on a : $f(x) = 2 - \frac{4}{x+1}$.

3°) Étudier les variations de f sur $\mathcal{D}$.

4°) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5°) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. Faire un tableau de signes.

6°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (prendre un centimètre ou un « gros carreau » pour unité graphique).

Recopier et compléter à l'aide de la calculatrice le tableau ci-dessous :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						X						

Tracer $\mathcal{C}$ et retrouver le résultat de la question 4°) graphiquement.

$\boxed{9}$ 1°) a) Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+4}{x-1}$ et la droite D d'équation $y = x$.

b) Conjecturer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de D.

2°) a) Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$: $f(x) - x = \frac{(x+1)(-x+4)}{x-1}$.

b) Étudier le signe de $\frac{(x+1)(-x+4)}{x-1}$ suivant les valeurs de x (faire un tableau de signes).

c) Valider la conjecture émise à la question 1°) b).

$\boxed{10}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{-x+3}{x+1}$ définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$ n a $f(x) = \frac{4}{x+1} - 1$.

2°) Étudier les variations de f sur les intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $]-1\,;+\infty[$.

Faire des phrases pour exprimer les variations de f sur les intervalles qui constituent $\mathcal{D}$.

On rédigera sur le modèle suivant :

« f est ……………………….. sur les intervalles ………………………………… ».

Faire le tableau de variations de f (à la règle ainsi que les flèches de variation).

3°) Recopier et compléter à l'aide de la calculatrice le tableau de valeurs suivant (on donnera la valeur arrondie au dixième pour certains résultats) :

x	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$f(x)$														

Prendre une demi-page pour faire un graphique.

Tracer un repère orthonormé (O, I, J) en prenant deux centimètres ou deux « gros » carreaux pour unité de longueur.

Placer les points du tableau de valeurs. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f sur l'intervalle $[-0,5\,;6]$ en reliant ces points « à la main ».

Vérifier sur calculatrice graphique.

$\boxed{11}$ On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre x Ajouter 4 Prendre l'inverse Multiplier par – 3 Ajouter 2

Ce programme définit une fonction f.

1°) Donner l'expression de $f(x)$.

2°) À quelle famille de fonctions appartient la fonction f ?

3°) Déterminer l'ensemble de définition de f.

4°) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f sur l'écran de la calculatrice.

Choisir une fenêtre graphique permettant d'avoir une vision globale de la courbe $\mathcal{C}$ (on notera que $\mathcal{C}$ est constituée de deux branches).

Recopier et compléter sans justifier les phrases suivantes concernant les variations de f (on admet que la vision graphique est exacte) :

La fonction f est ………………….. sur l'intervalle $]-\infty\,;-4[$.

La fonction f est ………………….. sur l'intervalle $]-4\,;+\infty[$.

Dresser le tableau de variation de f.

5°) Retrouver par une étude algébrique le sens de variation de *f* sur chacun des deux intervalles $\left]-\infty\,;-4\right[$ et $\left]-4\,;+\infty\right[$.

$\boxed{12}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x+4}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.

2°) On admet que *f* est strictement décroissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;-4\right[$ et $\left]-4\,;+\infty\right[$.
Dresser le tableau de variations de *f*.

3°) Déterminer le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $-\dfrac{3}{5} \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{7}$.

On écrira la réponse sous la forme : .... $\leqslant f(x) \leqslant$ ....

4°) Démontrer que *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-4\,;+\infty\right[$.

$\boxed{13}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x-3}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

2°) Étudier le signe de $f(x)$ (tableau de signes)

3°) $\dfrac{1}{2}$ a-t-il des antécédents par *f* ?

4°) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant -4$.

$\boxed{13}$ On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x}$ sur $\left]0\,;10\right]$.

La fonction *f* est-elle décroissante ?

Solutions

$\boxed{1}$ Ensemble de définition d'une fonction homographique

L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des réels pour lesquels l'image est calculable.

L'ensemble de définition se trouve en exprimant des conditions.

L'ensemble de définition d'une fonction dépend de la fonction.

Pour une fonction affine ou pour la fonction « carré », l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Pour une fonction homographique, la condition est que le dénominateur soit non nul.

Cours particulier avec Anne Boyenval le samedi 5 mars 2016 :

« On regarde juste le dénominateur ».

1°) Déterminons l'ensemble de définition de la fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x-1}$.

$f(x)$ existe si et seulement si $x-1 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 1$

L'ensemble de définition de *f* est l'ensemble de tous les réels privé de 1.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

égal barre descendante de gauche à droite

On s'arrête là.
On a répondu à la question.
On a pas a faire de calcul.
Cela signifie que $f(x)$ est calculable pour toutes valeurs de *x* différentes de 1. Autrement dit, on peut calculer $f(x)$ pour toutes les valeurs de *x* sauf pour 1.
[L'expression est calculable pour tous les réels *x* sauf pour 1].

2°) Déterminons l'ensemble de définition de la fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{3}{x-4}$.

$f(x)$ existe si et seulement si $x-4 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 4$

L'ensemble de définition de *f* est l'ensemble de tous les réels privé de 4.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

3°) Déterminons l'ensemble de définition de la fonction homographique $f : x \mapsto 3+\dfrac{2}{x}$.

On ne transforme pas l'expression de *f*.

$f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$

L'ensemble de définition de *f* est l'ensemble de tous les réels privé de 0.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4°) Déterminons l'ensemble de définition de la fonction homographique $f : x \mapsto 1-\dfrac{3}{x+1}$.

$f(x)$ existe si et seulement si $x+1 \neq 0$

si et seulement si $x \neq -1$

L'ensemble de définition de *f* est l'ensemble de tous les réels privé de – 1.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

5°) Déterminons l'ensemble de définition de la fonction homographique $f : x \mapsto 2-\dfrac{x+1}{x-3}$.

$f(x)$ existe si et seulement si $x-3 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 3$

L'ensemble de définition de *f* est l'ensemble de tous les réels privé de 3.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\boxed{2}$ **Formes canoniques de fonctions homographiques**

1°) $f(x)=1-\dfrac{2}{x}$ 2°) $f(x)=1+\dfrac{2}{x-2}$ 3°) $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{11}{2(4x+5)}$ 4°) $f(x)=1+\dfrac{2}{2x-1}$

$\boxed{4}$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto 3+\dfrac{5}{x-2}$

1°) Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.

$f(x)$ existe si et seulement si $x-2 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 2$

$\mathcal{D} =]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$

2°) Étudions les variations de *f*.

Étudions les variations de f sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

Soit x_1 et x_2 deux réels quelconques dans l'intervalle $]2\,;+\infty[$ tels que $x_1 < x_2$.

On a : $2 < x_1 < x_2$.

On soustrait 2 à chaque membre de cette inégalité.

$0 < x_1 - 2 < x_2 - 2$

On prend l'inverse de chaque membre de cette inégalité.

$\dfrac{1}{x_1-2} > \dfrac{1}{x_2-2}$ (le 0 « disparaît »)

On multiplie par 5 chaque membre de cette inégalité.

Le sens de l'inégalité ne change pas car $5 > 0$.

$\dfrac{5}{x_1-2} > \dfrac{5}{x_2-2}$

On ajoute 3 à chaque membre de cette inégalité.

$3+\dfrac{5}{x_1-2} > 3-\dfrac{5}{x_2-2}$

On obtient $f(x_1) > f(x_2)$.

Ainsi, la fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

Étudions les variations de f sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$.

Soit x_1 et x_2 deux réels quelconques dans l'intervalle $]-\infty\,;2[$ tels que $x_1 < x_2$.

On a : $x_1 < x_2 < 2$.

On soustrait 2 à chaque membre de cette inégalité.

$x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0$

$\dfrac{1}{x_1-2} > \dfrac{1}{x_2-2}$

$\dfrac{5}{x_1-2} > \dfrac{5}{x_2-2}$

On ajoute 3 à chaque membre de cette inégalité.

$$3+\frac{5}{x_1-2}>3-\frac{5}{x_2-2}$$

On obtient $f(x_1)>f(x_2)$.

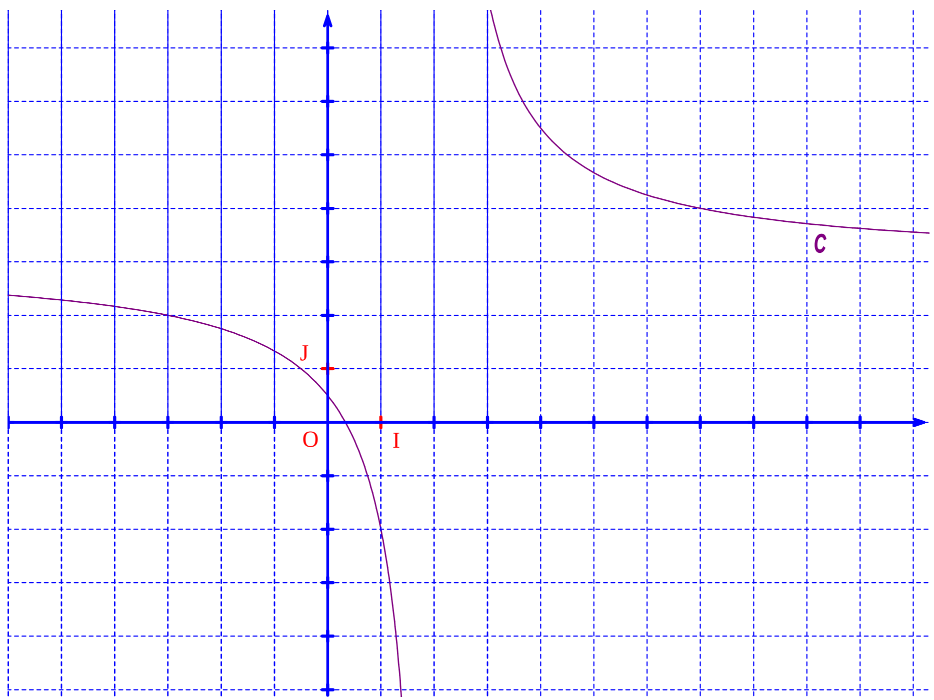
Ainsi, la fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	||	$\searrow$	

3°)

x	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$													

Tracé de **C** :



4°) $D:\ y=x-3$

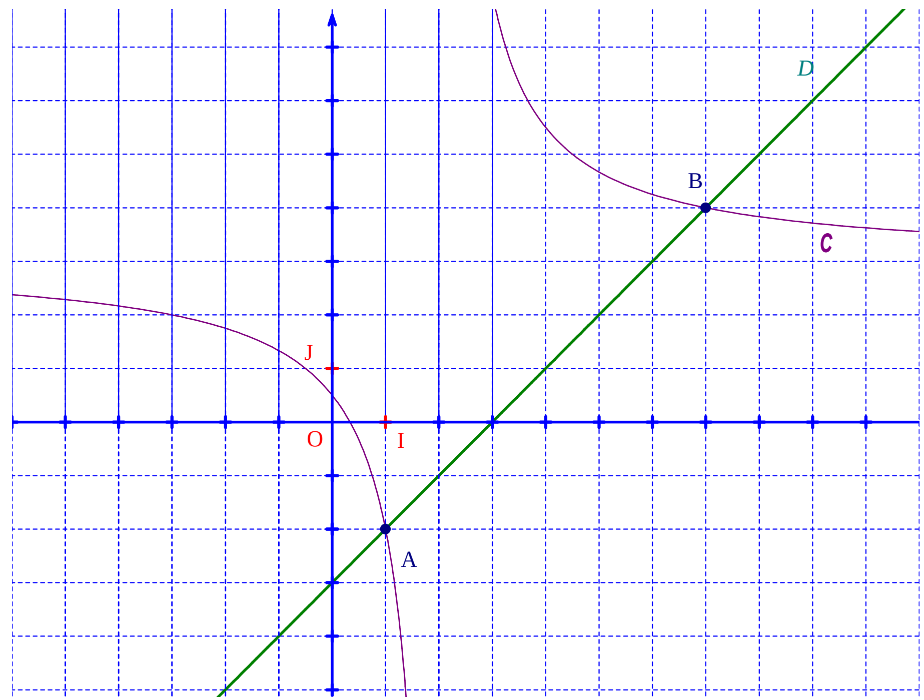
Déterminons par le calcul les coordonnées des points A et B où **C** rencontre *D*.

Les abscisses des points d'intersection de **C** et *D* sont les solutions de l'équation : $f(x)=x-5$ (1).

En se plaçant dans $\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\}$, (1) est successivement équivalente à :

$$3+\frac{5}{x-2}=x-3$$
$$\frac{5}{x-2}=x-6$$
$$5=(x-6)(x-2)$$
$$5\ =x^2-8x+12$$
$$x^2-8x+7=0$$
$$(x-1)(x-2)=0$$
$$x-1=0 \text{ ou } x-2=0$$
$$x=1 \text{ ou } x=2$$

C et *D* se coupent aux points $\mathrm{A}(1\,;-2)$ et $\mathrm{B}(7\,;4)$.



$\boxed{5}$ $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x}$

1°) $x \mapsto \dfrac{-x-1}{-x}$ Vrai 2°) $x \mapsto 1+\dfrac{1}{x}$ Vrai 3°) $x \mapsto \dfrac{2x+1}{2x}$ Faux 4°) $x \mapsto \dfrac{x-1}{-x}$ Faux

Il n'y a pas vraiment de méthode pour ce type d'exercices.

On essaie de transformer les expressions proposées en appliquant les règles de calcul algébrique.

$$\frac{2x+1}{2x}=\frac{x+\frac{1}{2}}{x}$$

$$\frac{x-1}{-x}=-\frac{x-1}{x}=\frac{-x+1}{x}$$

$\boxed{6}$ 3°) $x=32$

$\boxed{7}$ 1°)

a) Pour $\dfrac{a\times b+5}{a\times b+7}$, on ne peut pas appliquer la règle car le dénominateur et le numérateur ne sont pas des produits.

b) Pour $\dfrac{3(x-1)}{3x}$, on peut l'appliquer, car le dénominateur et le numérateur sont des produits, et qu'ils ont le même facteur en commun : 3.

c) Pour $\dfrac{2+7x}{7x}$, on ne peut pas l'appliquer, car le dénominateur et le numérateur ne sont pas des produits.

2) Dans le cas b), on a : $\dfrac{3(x-1)}{3x}=\dfrac{x-1}{x}$.

$\boxed{8}$ 5°) Tableau de valeurs de f :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2,8	3	3,3	4	6	X	-2	0	0,6	1	1,2	1,4

$\boxed{9}$ 1°) Attention à bien taper (2X+4)/(X-1).

$\boxed{11}$ On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre x Ajouter 4 Prendre l'inverse Multiplier par -3 Ajouter 2

Ce programme définit une fonction f.

1°) Donner l'expression de $f(x)$.

$$f(x)=2-\frac{3}{x+4}$$

Cours particulier avec Anne Boyenval le samedi 5 mars 2016 :

Cet exercice a pour but de tester la maîtrise du vocabulaire.
« On prend l'inverse ».
Relier français et expressions algébriques.

Voici exactement ce que j'avais noté sur la feuille.

« On prend l'inverse ».
Relier français et expression algébrique
maîtrise du vocabulaire

2°) À quelle famille de fonctions appartient la fonction f ?

f est une fonction homographique.

3°) Déterminer l'ensemble de définition de f.

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

4°) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty\,;-4[$.
Donner de même sans justifier celui de la fonction f sur l'intervalle $]-4\,;+\infty[$.
5°) Dresser le tableau de variation de f.

$\boxed{12}$

$f : x \mapsto \dfrac{2x}{x+4}$

On notera que la fonction f est une fonction homographique.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

$f(x)$ existe si et seulement si $x+4\neq 0$
si et seulement si $x\neq -4$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

2°) On admet que *f* est strictement décroissante sur chacun des intervalle $]-\infty\,;-4[$ et $]-4\,;+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de *f*.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
Variations de *f*		↘	‖	↘	

3°) Déterminer le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $-\dfrac{3}{5} \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{7}$.

On commence par calculer $f\left(-\dfrac{3}{5}\right)$ et $f\left(-\dfrac{1}{7}\right)$.

$$f\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{2\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{-\dfrac{3}{5}+4} = -\frac{6}{17}$$

$$f\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{2\times\left(-\dfrac{1}{7}\right)}{-\dfrac{1}{7}+4} = -\frac{2}{27}$$

x	$-\infty$	$-\dfrac{3}{5}$	$-\dfrac{1}{7}$	-4	$+\infty$
Variations de *f*	↘	$-\dfrac{6}{17}$	$-\dfrac{2}{27}$ ↘	‖	↘

Lorsque $-\dfrac{3}{5} \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{7}$, le meilleur encadrement possible de $f(x)$ est : $-\dfrac{2}{27} \leqslant x \leqslant -\dfrac{6}{17}$.

4°) Démontrer que *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $]-4\,;+\infty[$.

Exercices-types

$\boxed{1}$ On considère la fonction $f : x \mapsto 4 + \dfrac{5}{x+2}$.

Étudier le sens de variation de *f* sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

Solution :

On considère deux réels quelconques x_1 et x_2 dans l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ tels que $x_1 < x_2$.

On a : $-2 < x_1 < x_2$.

On ajoute 2 à chaque membre de cette inégalité.

$0 < x_1 + 2 < x_2 + 2$

On prend l'inverse de chaque membre de cette inégalité.

$$\frac{1}{x_1+2} > \frac{1}{x_2+2}$$

• Le sens de l'inégalité change.
• Dans l'inverse, le 0 subit un sort particulier, à savoir qu'il n'apparaît pas sur la ligne. En effet, on ne peut pas calculer l'inverse de 0.

On multiplie par 5 chaque membre de cette inégalité.
Le sens de l'inégalité ne change pas car $5 > 0$.

$$\frac{5}{x_1+2} > \frac{5}{x_2+2}$$

On ajoute 4 à chaque membre de cette inégalité.

$$\frac{5}{x_1+2} + 4 > \frac{5}{x_2+2} + 4$$

On obtient $f(x_1) > f(x_2)$.
Ainsi, la fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

Récapitulatif des étapes :

① $-2 < x_1 < x_2$

② $0 < x_1 + 2 < x_2 + 2$

③ $\dfrac{1}{x_1+2} > \dfrac{1}{x_2+2}$

④ $\dfrac{5}{x_1+2} > \dfrac{5}{x_2+2}$

⑤ $\dfrac{5}{x_1+2} + 4 > \dfrac{5}{x_2+2} + 4$

$\boxed{2}$ On considère la fonction $f : x \mapsto 1+\dfrac{3}{2-x}$.

Étudier le sens de variation de *f* sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

Solution :

On considère deux réels quelconques x_1 et x_2 dans l'intervalle $]2\,;+\infty[$ tels que $x_1 < x_2$.

On a : $2 < x_1 < x_2$.

On multiplie les deux membres de cette inégalité par – 1.
Le sens de l'inégalité change car $-1 < 0$.

$$-2 > -x_1 > -x_2$$

On ajoute 2 à chaque membre de cette inégalité.

$$0 > 2-x_1 > 2-x_2$$

On prend l'inverse de chaque membre de cette inégalité.

$$\frac{1}{2-x_1} < \frac{1}{2-x_2}$$

- Le sens de l'inégalité change.
- Dans l'inverse, le 0 subit un sort particulier, à savoir qu'il n'apparaît pas sur la ligne. En effet, on ne peut pas calculer l'inverse de 0.

On multiplie par 3 chaque membre de cette inégalité.
Le sens de l'inégalité de change pas car $3 > 0$.

$$\frac{3}{2-x_1} < \frac{3}{2-x_2}$$

On ajoute 1 à chaque membre de cette inégalité.

$$1+\frac{3}{2-x_1} < 1+\frac{3}{2-x_2}$$

On obtient $f(x_1) < f(x_2)$.
Ainsi, la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

$\boxed{3}$ On considère la fonction $f : x \mapsto 1-\dfrac{2}{x+1}$.

Étudier le sens de variation de *f* sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

Solution raccourcie :

① $-1 < x_1 < x_2$

② $0 < x_1+1 < x_2+1$

③ $\dfrac{1}{x_1+1} > \dfrac{1}{x_2+1}$

④ $-\dfrac{2}{x_1+1} < -\dfrac{2}{x_2+1}$

⑤ $1-\dfrac{2}{x_1+1} < 1-\dfrac{2}{x_2+1}$

On obtient $f(x_1) < f(x_2)$.
Ainsi, la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.