$1^{\text{ère}}$ S **Exercices sur les équations et inéquations trigonométriques (1)**

Pour chaque équation ou inéquation, tracer un cercle trigonométrique assez grand* très soigneusement (au compas !).

1 Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2 Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi]$ l'équation $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

3 Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\cos x = 0$.

4 Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5 Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi]$ l'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6 Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\sin x = -1$.

7 Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi]$ l'inéquation $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

8 Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation $\sin x \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

9 Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation $\cos^2 x < \dfrac{1}{4}$.

10 On considère deux demi-droites [Ox) et [Oy) telles que $\widehat{x\mathrm{O}y} = \alpha°$.
Soit A un point de]Ox), B son projeté orthogonal sur la droite (Oy) et C le projeté orthogonal de B sur la droite (Ox).

1°) On suppose que l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y}$ est aigu.
a) Calculer OC en fonction de OA et de cos α°.
b) Déterminer la valeur de α pour que l'on ait $\mathrm{OC} = \dfrac{1}{4}\mathrm{OA}$.
Faire la figure correspondante.

2°) Reprendre la question précédente en supposant que l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y}$ est obtus $(90 < \alpha < 180)$.

* Au moins 5 cm ou 5 « gros » carreaux.

Réponses

$\boxed{\mathbf{1}}$ $S=\left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$

Remarque : dans les accolades, l'ordre n'a pas d'importance.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $S=\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $S=\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $S=\left\{-\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right\}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $S=\left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $S=\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Méthode : utiliser le cercle trigonométrique.

$S=\left]\frac{\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right[$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Méthode : utiliser le cercle trigonométrique.

$S=\left[-\pi ; -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4} ; \pi\right]$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Méthode : utiliser le cercle trigonométrique.

$S=\left]\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3}\right[$

$\boxed{\mathbf{10}}$ 1°) a) OC = OA $\times$ $\cos^2 \alpha°$ b) $\alpha = 60$

2°) OC = OA $\times$ $\cos^2 \alpha°$ b) $\alpha = 120$

Solutions détaillées

• On résout toutes les équations et inéquations trigonométriques par lecture graphique.

• On peut aussi utiliser un logiciel de calcul formel.

• **Faire un cercle trigonométrique pour chaque équation ou inéquation.**

Classification des exercices

① Équations

Équations du type $\cos x = a$: exercices **1** à **3** .

Équations du type $\sin x = a$: exercices **4** à **6** .

② Inéquations

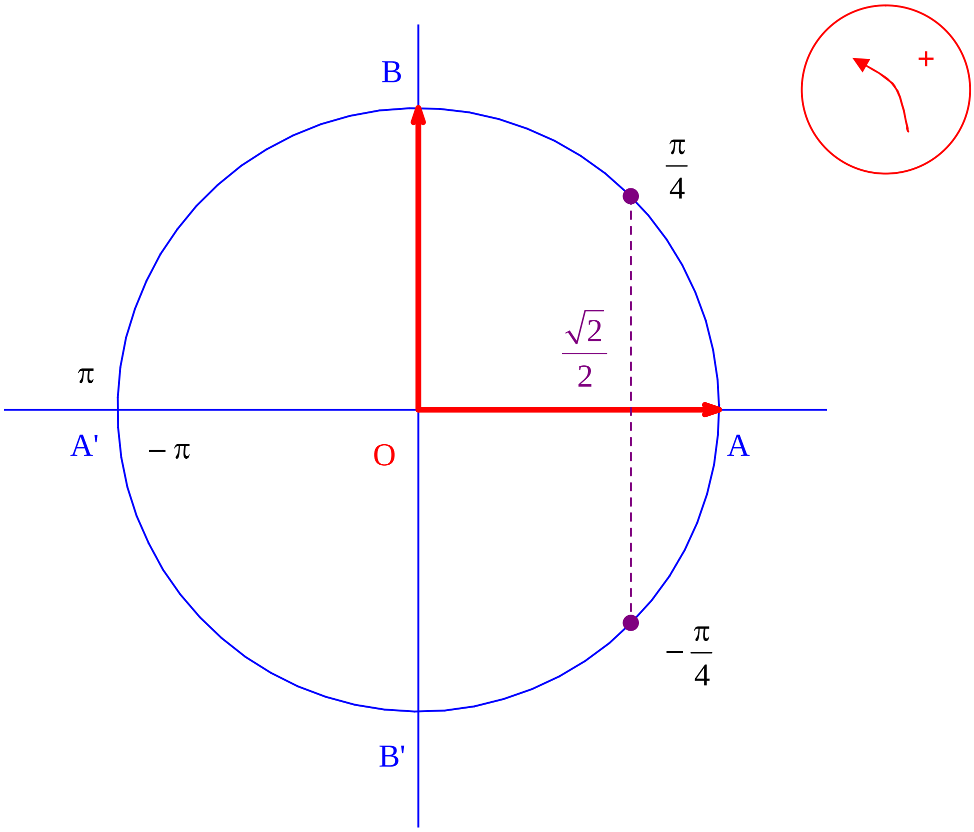
Inéquations du type $\cos x \leqslant a$, $\sin x \leqslant a$ et toutes les variantes possibles.

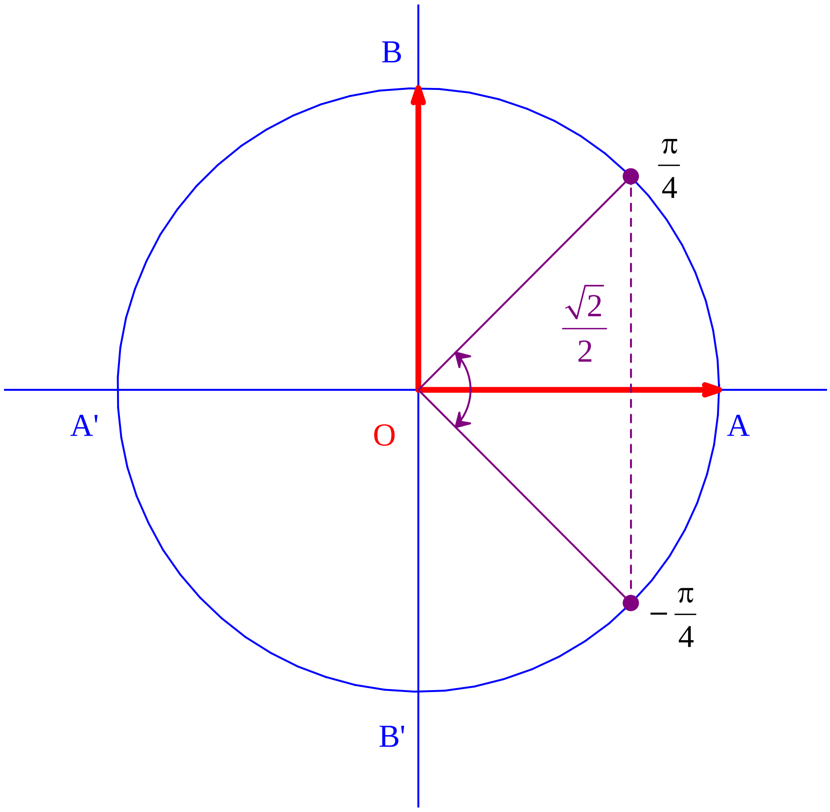
Exercices **7** à **9** .

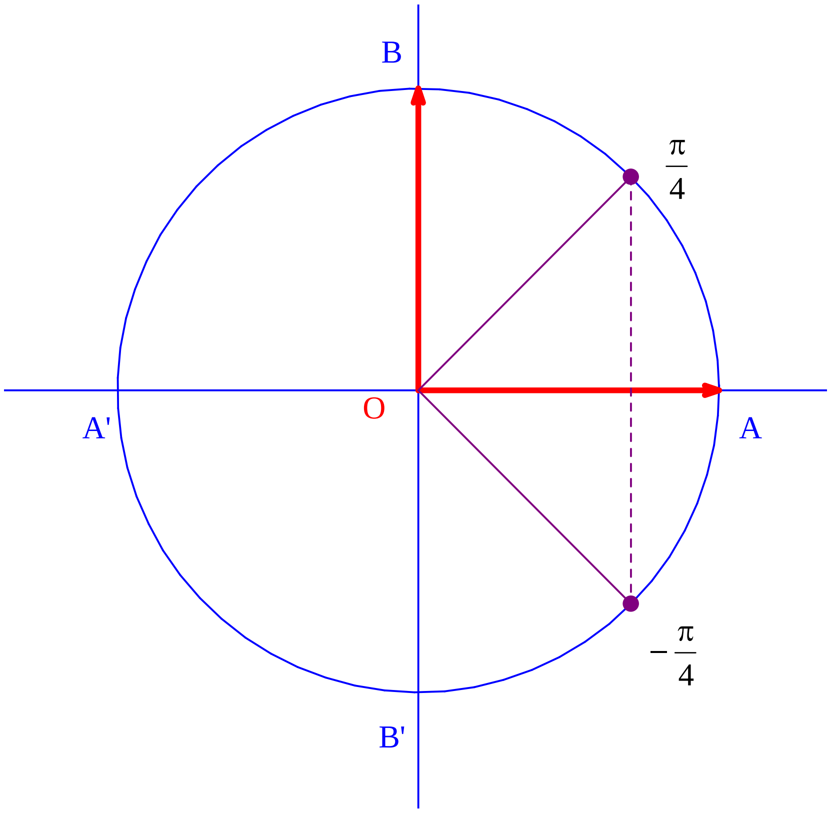
③ Utilisation dans des situations

Exercice **10** .

$\boxed{1}$ **Résolvons dans $\left[-\pi\ ;\ \pi\right]$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1).**



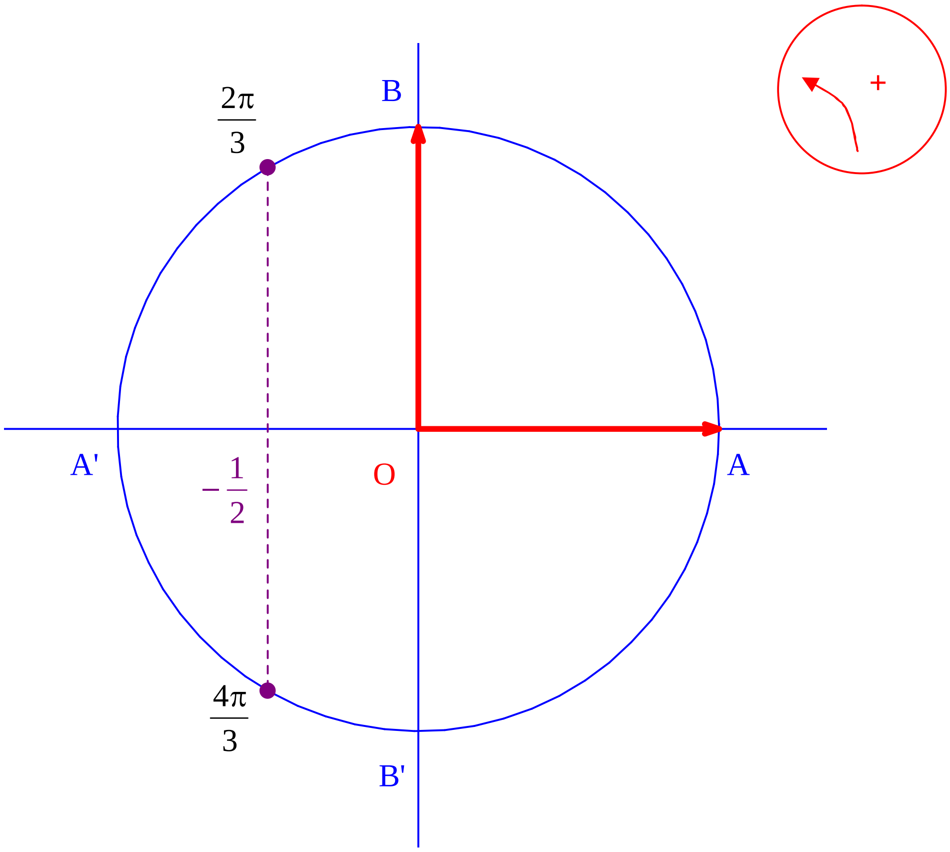


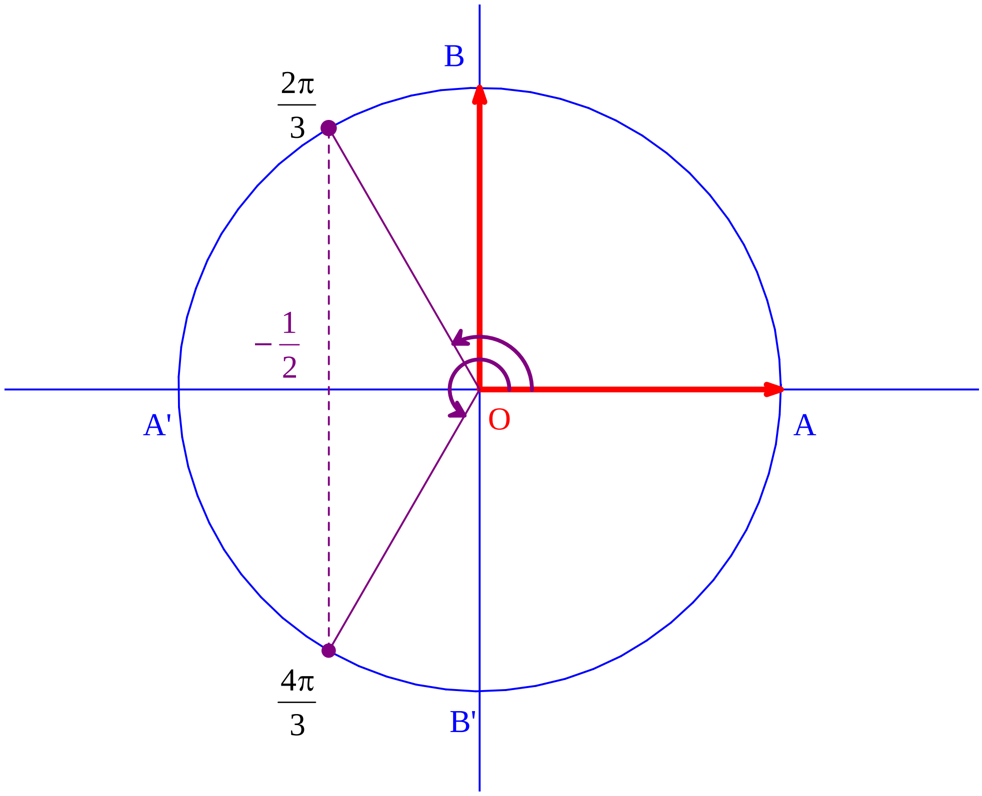


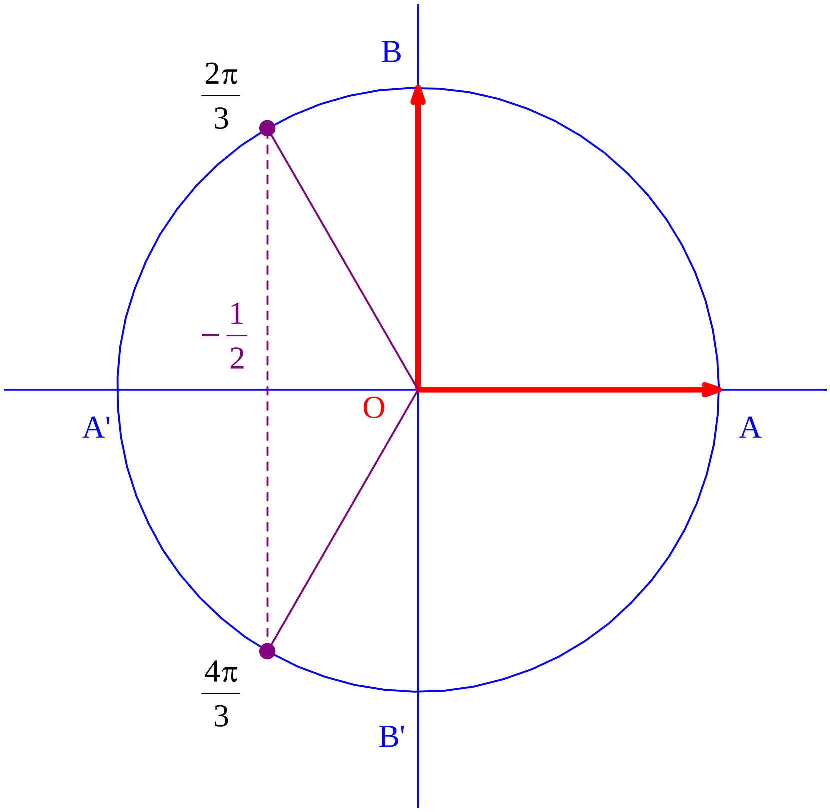
Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1) dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

$$\boldsymbol{S_1 = \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}}$$

$\boxed{2}$ **Résolvons dans $[0\ ;\ 2\pi]$ l'équation $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ (2).**







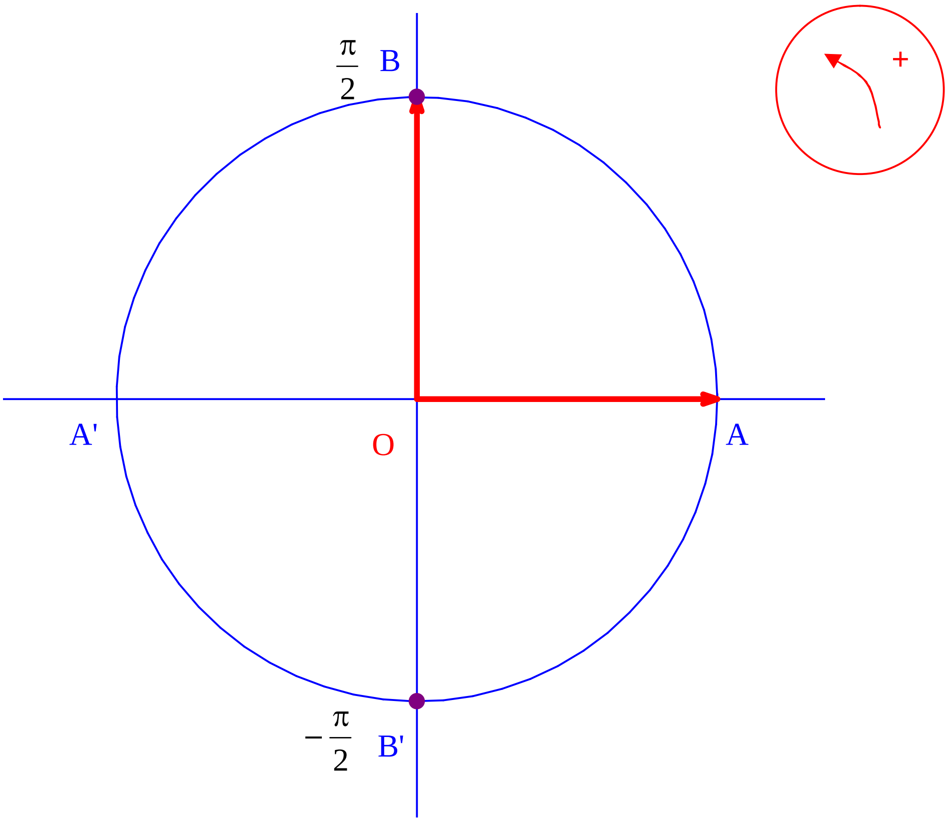
Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2) dans l'intervalle $\left[0\ ;\ 2\pi\right]$.

$$S_2 = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

$\boxed{3}$ **Résolvons dans $\left[-\pi\ ;\ \pi\right]$ l'équation $\cos x = 0$ (3).**

Il y a deux points images dans l'arc considéré.

Il y a deux solutions dans l'intervalle.



Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3) dans l'intervalle $\left[-\pi\ ;\ \pi\right]$.

$$S_3 = \left\{-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right\}$$

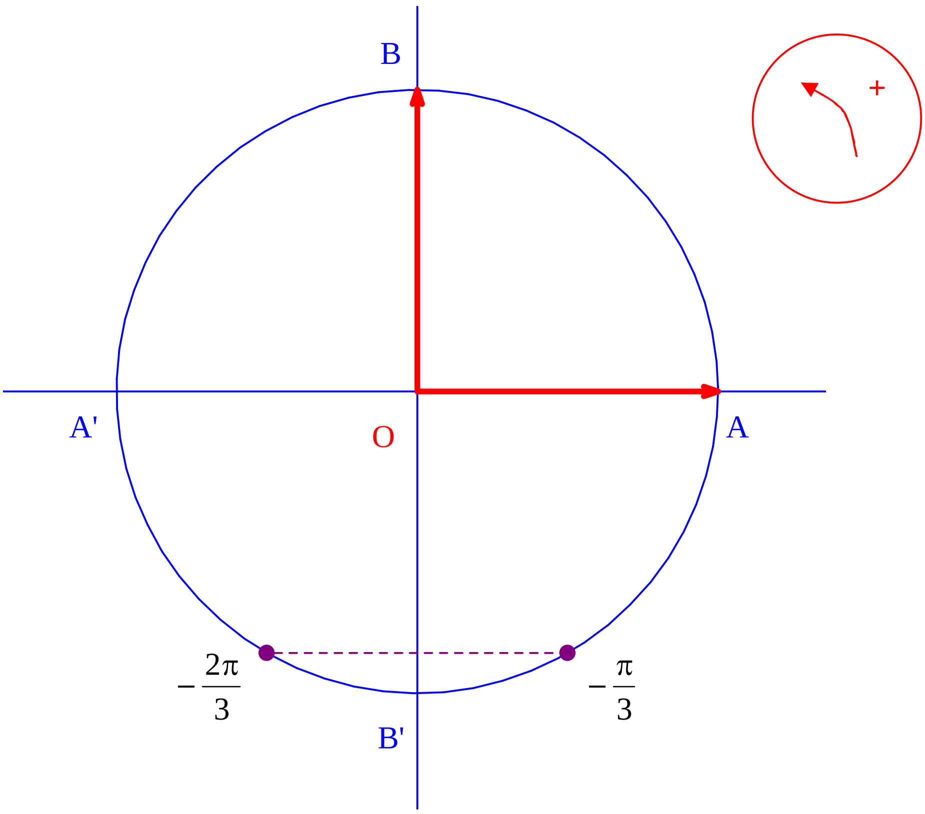
$\boxed{4}$ Résolvons dans $\left[-\pi\ ;\ \pi\right]$ l'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (4).

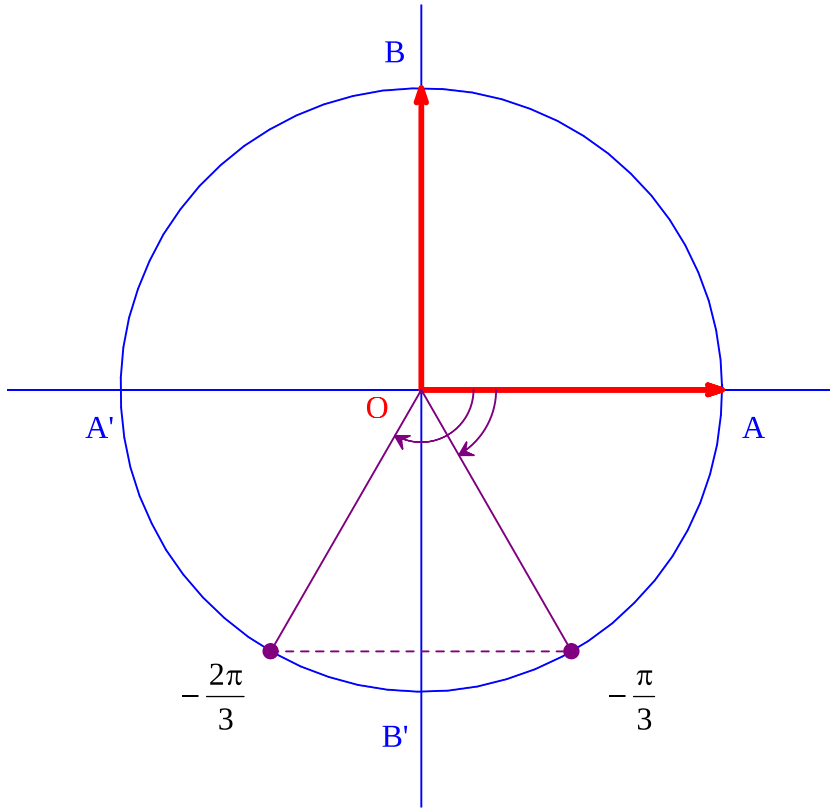
On associe $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ à des valeurs du tableau des valeurs remarquables.

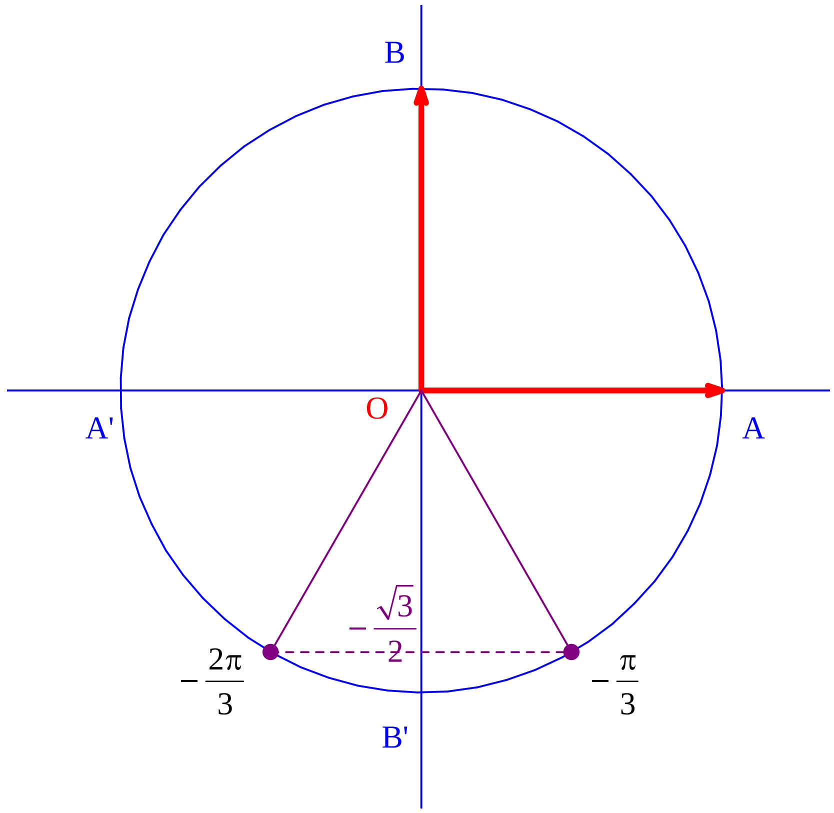
$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est une valeur remarquable du sinus associé à la famille des « $\dfrac{\pi}{3}$ ».

On peut placer les quatre points de la famille des « $\dfrac{\pi}{3}$ » puis éventuellement tracer le rectangle formé par ces points.

Comme le sinus est négatif, les points images des solutions se situent dans le demi-cercle au-dessous de l'axe des abscisses.



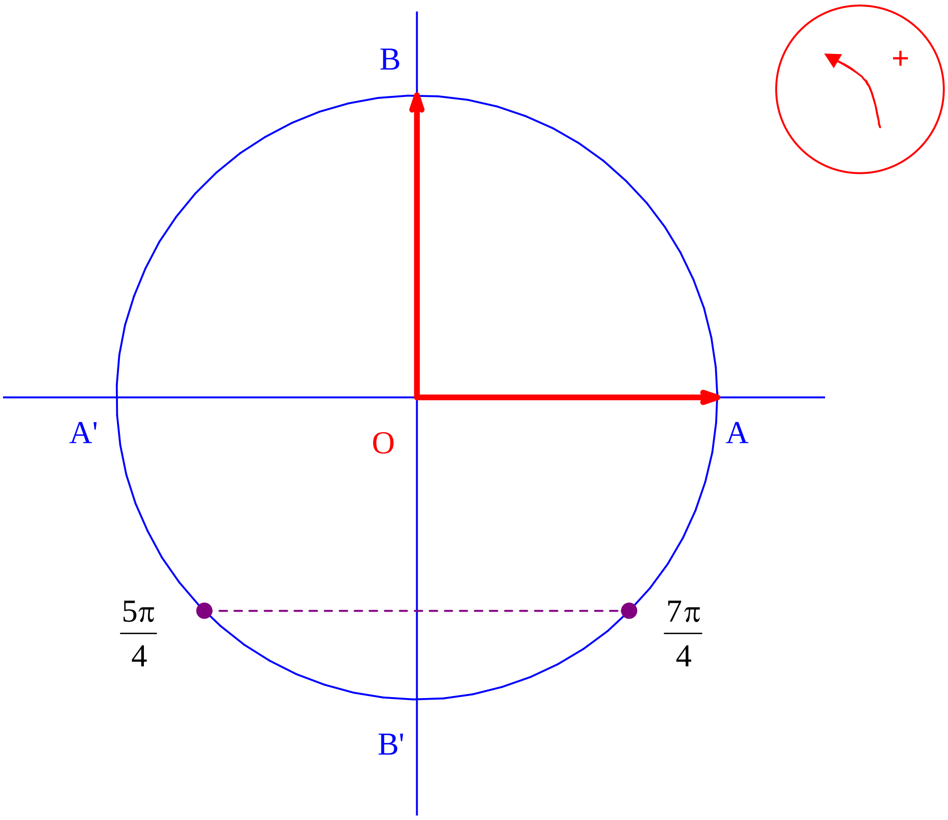


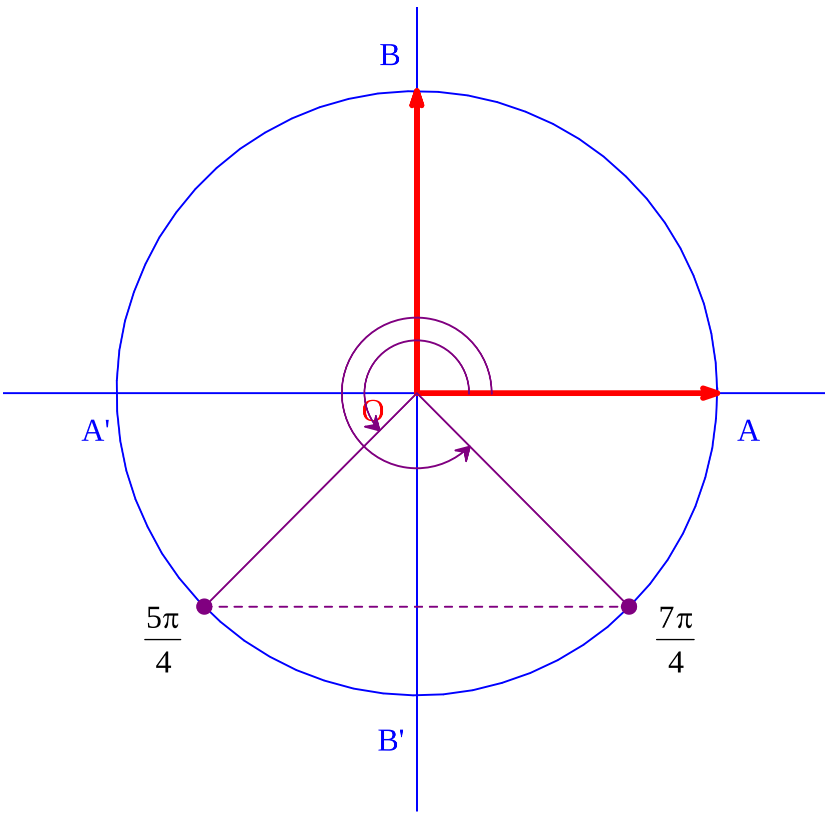


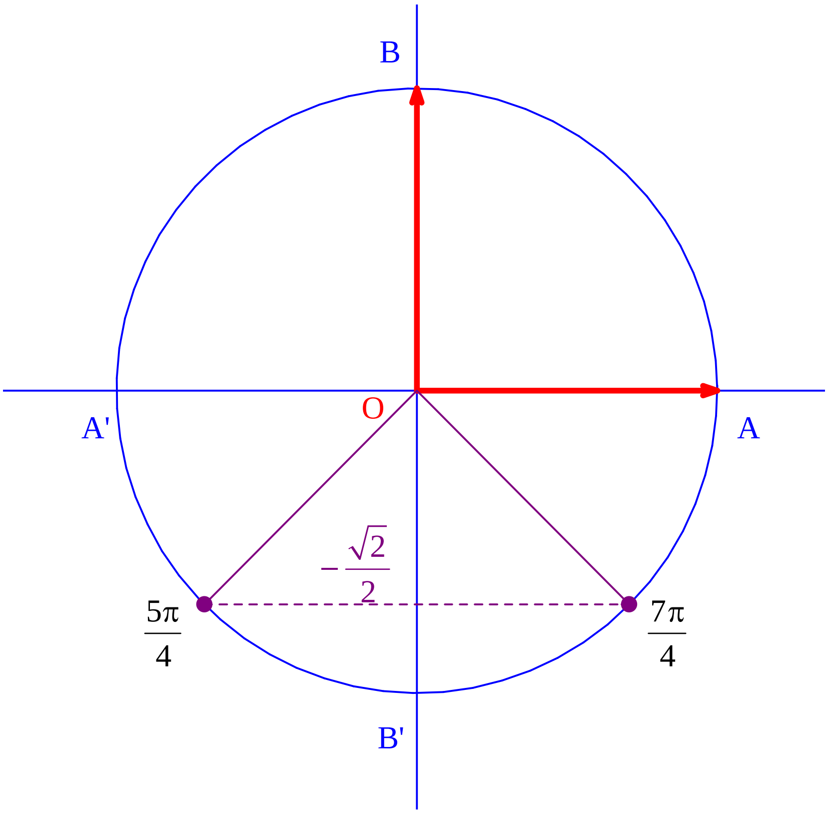
Soit S_4 l'ensemble des solutions de (5) dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

$$S_4 = \left\{-\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right\}$$

$\boxed{5}$ **Résolvons dans $[0\ ;\ 2\pi]$ l'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (5).**







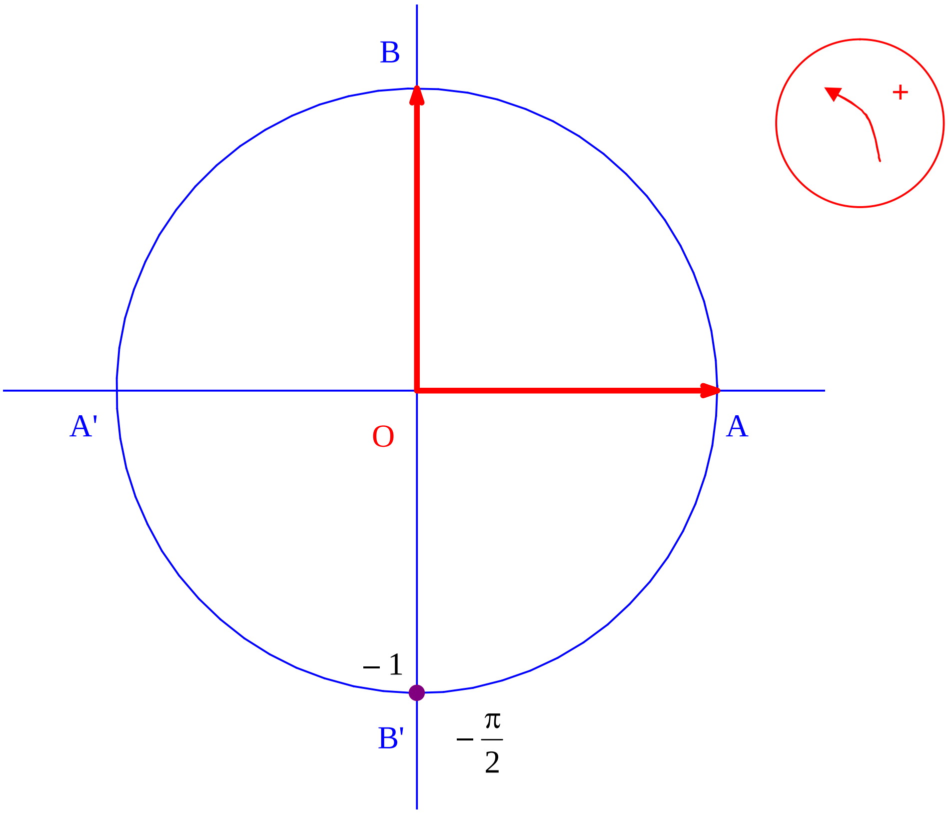
Soit S_5 l'ensemble des solutions de (5) dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

$$\boldsymbol{S_5 = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}}$$

$\boxed{6}$ Résolvons dans $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\sin x = -1$ (6).

On cherche les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est égale à – 1.
Il y a donc un seul point image : B' (seul point du cercle trigonométrique qui a pour ordonnée – 1).

Il y a une seule solution dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.



Soit S_6 l'ensemble des solutions de (6) dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

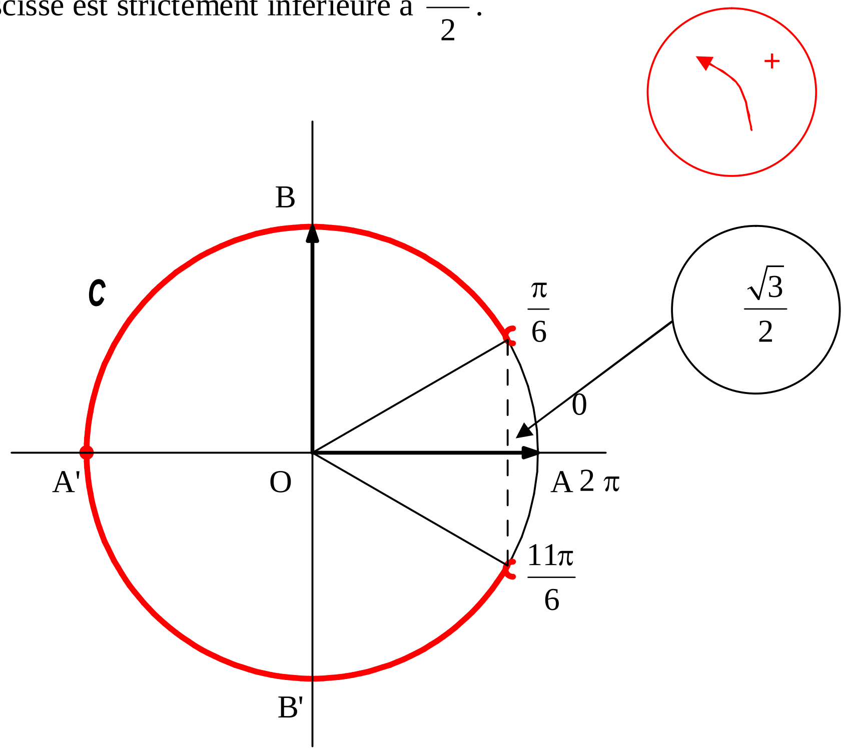
$$S_6 = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$$

$\boxed{7}$ **Résolvons dans $[0\ ;\ 2\pi]$ l'inéquation $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (7).**

Utilisation du cercle trigonométrique

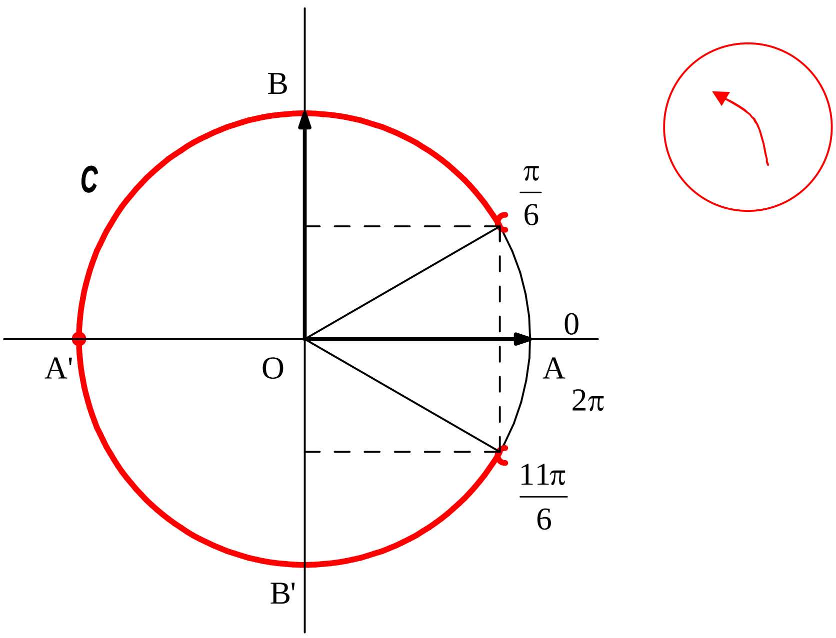
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une valeur remarquable du cosinus associée à la famille des « $\frac{\pi}{6}$ ».

On cherche les points dont l'abscisse est strictement inférieure à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Les solutions sont représentées par l'arc rouge (grand arc de cercle).

Les extrémités sont obtenues par constructions au compas ou en utilisant les milieux des segments [OB] et [OB′].



Soit S_7 l'ensemble des solutions de (7) dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

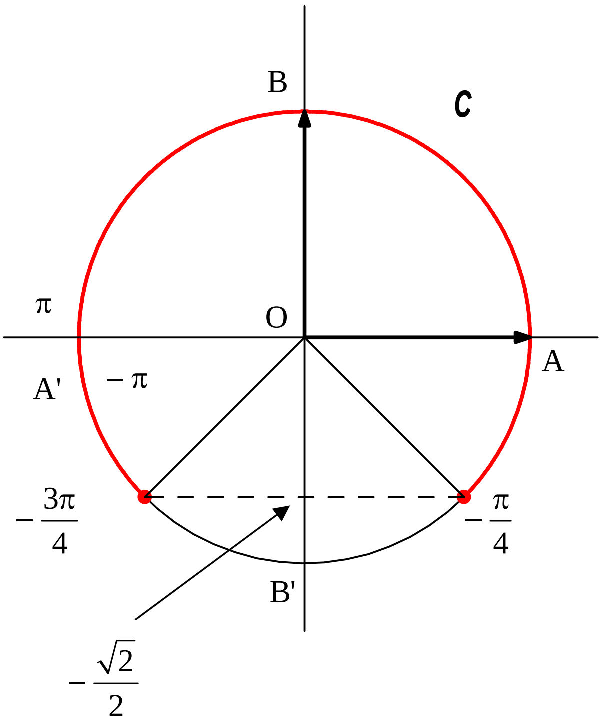
$$S_7 = \left]\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{11\pi}{6}\right[$$

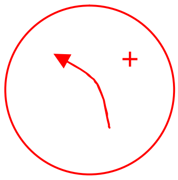
On peut aussi faire apparaître les extrémités des arcs par des crochets.

$\boxed{8}$ **Résolvons dans $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation $\sin x \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (8).**

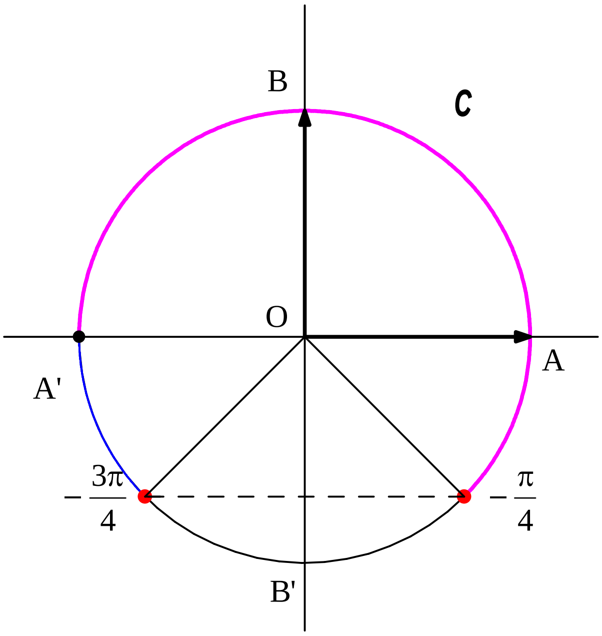
Utilisation du cercle trigonométrique.

On cherche les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est supérieure ou égale à $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.





Les solutions sont représentées par le grand arc rouge (extrémités comprises).
Pour placer les extrémités, on utilise les bissectrices des angles $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB'}$ (ce qui est aisé si l'on travaille sur papier quadrillé) ; les extrémités de l'arc rouge sont les milieux des arcs $\overset{\frown}{AB'}$ et $\overset{\frown}{A'B'}$.



Soit S_8 l'ensemble des solutions de (8) dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

$$S_8 = \left[-\pi\ ;-\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}\ ;\ \pi\right]$$

L'ensemble S_8 est la réunion de deux intervalles.

$\boxed{9}$ Résolvons dans $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation $\cos^2 x < \frac{1}{4}$ (9).

1$^{\text{ère}}$ étape : se débarrasser du carré

(9) $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$

(En effet, $X^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}$)

Autre façon de faire :

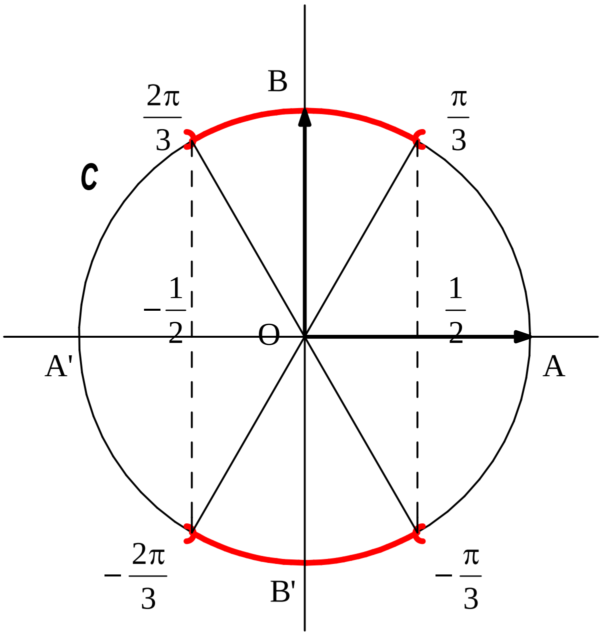
(9) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{\cos^2 x} < \frac{1}{2}$ (car la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$)

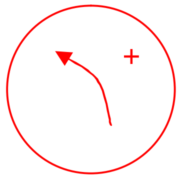
$\Leftrightarrow$ $|\cos x| < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$

On a une double inéquation.
On peut donc séparer en deux inéquations simples ou bien on adapte la méthode graphique étudiée dans le cours en utilisant le cercle trigonométrique.

2^e^ étape : utiliser un cercle trigonométrique





Soit S_9 l'ensemble des solutions de (9) dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

$$\boldsymbol{S_9 = \left]\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{2\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{3}\right[}$$

L'ensemble S_9 est la réunion de deux intervalles.

$\boxed{10}$ **Il n'y a pas à faire de cercle trigonométrique dans cet exercice.**

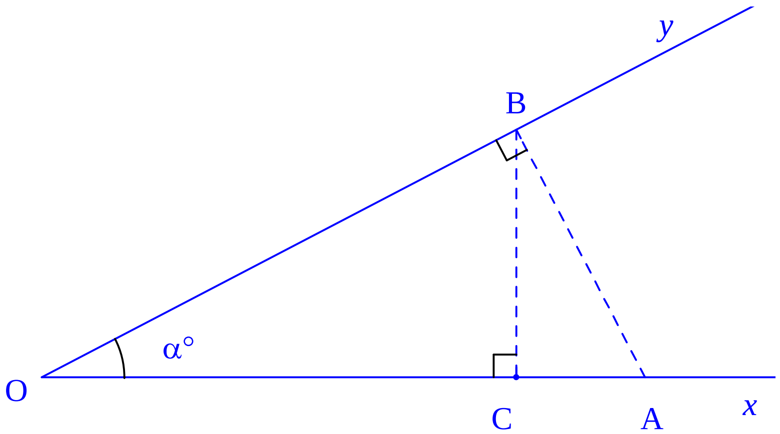
1°) $\widehat{xOy} = \alpha°$ avec $0 < \alpha < 90$

$A \in]Ox)$

B : projeté orthogonal de A sur la droite (Oy)

C : projeté orthogonal de B sur la droite (Ox)

On commence par faire une première figure avec une valeur quelconque de α.



a) **Calculons OC en fonction de OA et de cos α°.**

Dans le triangle OAB, rectangle en B, on a : $\cos\alpha° = \dfrac{OB}{OA}$.

Dans le triangle OBC, rectangle en C, on a : $\cos\alpha° = \dfrac{OC}{OB}$.

On a donc $OB = OA \times \cos\alpha°$ et $OC = OB \times \cos\alpha°$.

Par suite,

$$\boxed{\mathbf{OC = OA \times \cos^2\alpha°}}$$

b) **Déterminons α pour que $OC = \dfrac{1}{4}OA$ (1).**

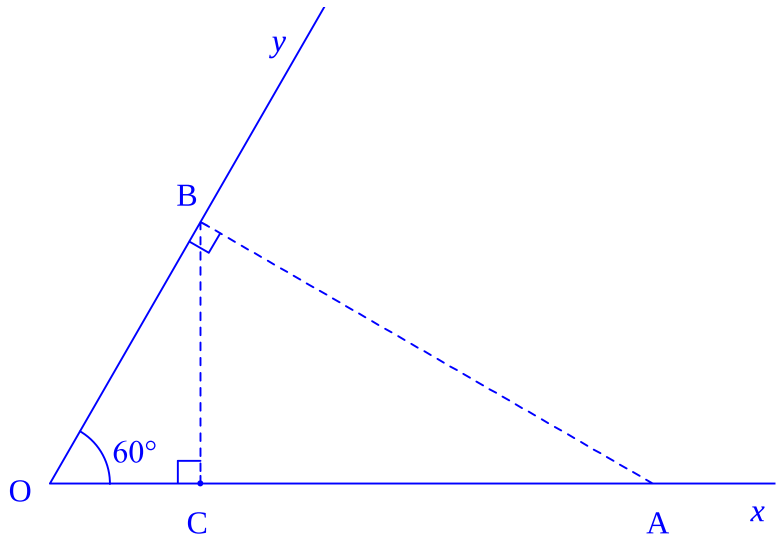
$(1) \Leftrightarrow \cos^2\alpha° = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha° = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos\alpha° = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \mathbf{\alpha = 60}$ ($0 < \alpha < 90$, utilisation du cercle trigonométrique)

Figure correspondante (en utilisant le rapporteur)

On refait une figure avec la valeur exacte de α trouvée précédemment c'est-à-dire $\alpha = 60$.



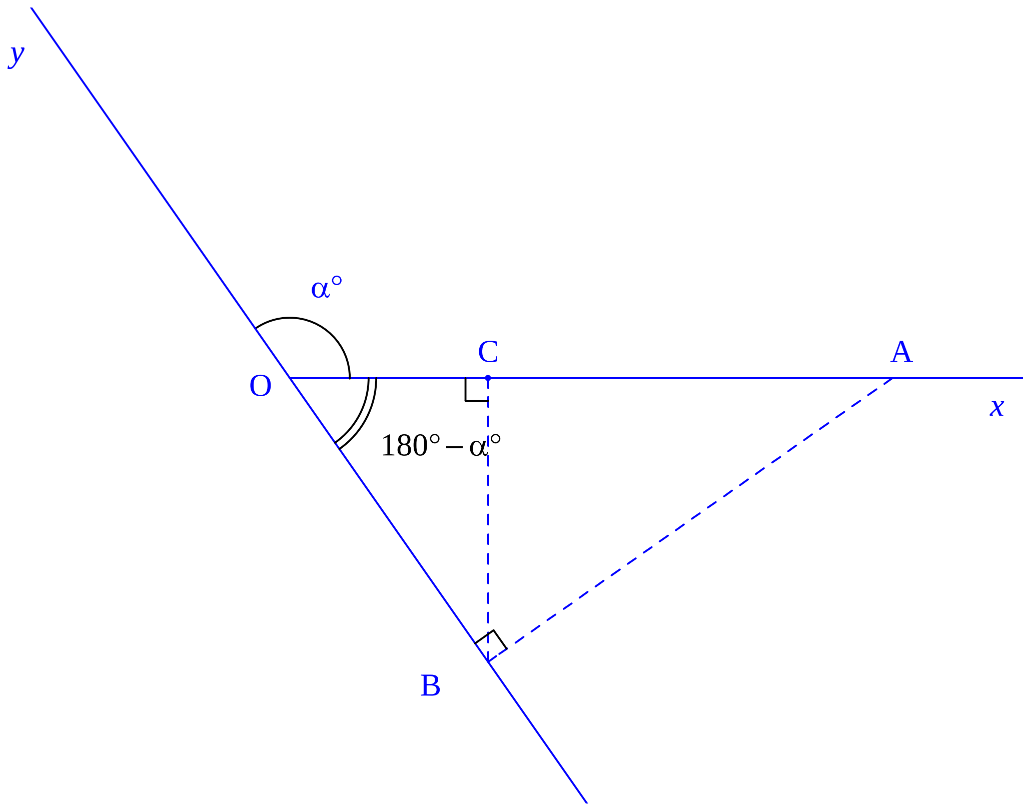
2°) $\widehat{xOy} = \alpha°$ avec $90 < \alpha < 180$

A $\in$]Ox)

B : projeté orthogonal de A sur la droite (Oy)

C : projeté orthogonal de B sur la droite (Ox)

On commence par faire une première figure avec une valeur quelconque de α.



Dans le triangle OAB, rectangle en B, on a : $\cos(180° - \alpha°) = \dfrac{OB}{OA}$ soit $-\cos\alpha° = \dfrac{OB}{OA}$.

Dans le triangle OBC, rectangle en C, on a : $\cos(180° - \alpha°) = \dfrac{OC}{OB}$ soit $-\cos\alpha° = \dfrac{OC}{OB}$.

On a donc $OB = -\cos\alpha° \times OA$ et $OC = -\cos\alpha° \times OB$.

Par suite,

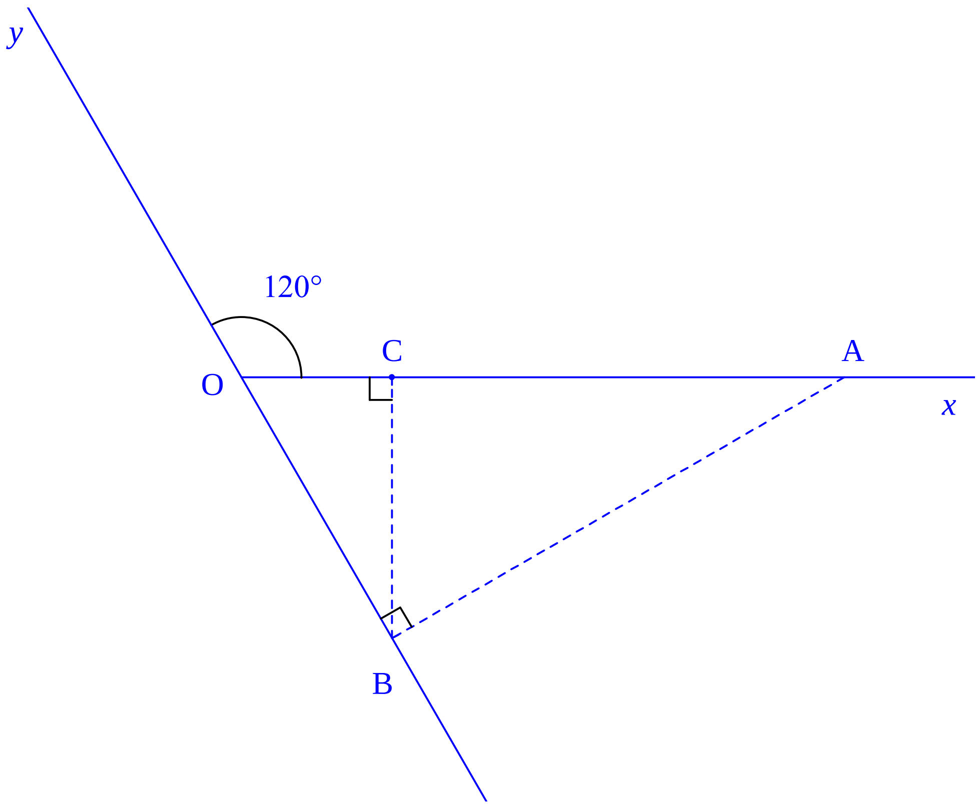
$$\boxed{\mathbf{OC = OA \times \cos^2\alpha°}}$$

b) **Déterminons α pour que $OC = \dfrac{1}{4}OA$ (1).**

$(1) \Leftrightarrow \cos^2\alpha° = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha° = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos\alpha° = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\alpha = 120}$ $(90 < \alpha < 180$, utilisation du cercle trigonométrique)



y
120°
C
A
O
x
B