1$^{\text{ère}}$ S

Règles sur le sens de variation des fonctions

Mots-clefs :

- sens de variation (fonction croissante, décroissante)
- fonction monotone sur un intervalle

Objectif : donner quelques règles permettant d'étudier rapidement le sens de variation d'une fonction à partir de celui de fonctions de référence (sans calcul, c'est-à-dire sans comparer les images de deux réels, comme cela a été fait jusqu'à présent).

Les démonstrations du chapitre sont à savoir (cependant, on appliquera directement les règles en exercice sans refaire les démonstration).

• Après ce chapitre, on disposera de règles qui fournissent un moyen rapide et efficace pour déterminer les variations d'une fonction.

• Nous n'utiliserons plus la méthode par comparaison de $f(a)$ et $f(b)$. C'est une méthode importante à connaître cependant (peu utilisée sur le plan pratique car fastidieuse, mais importante sur le plan théorique comme on peut s'en rendre pour les démonstrations de ce chapitre).
Nous utiliserons le plus possible les règles données dans ce chapitre.

• La méthode sera toujours indiquée dans les exercice : tableau ou rédaction.
S'il s'agit de rédaction, des modèles seront même fournis.

• Nous verrons un peu plus tard cette année un autre moyen extrêmement puissant pour déterminer les variations d'une fonction avec les dérivées. En attendant, nous n'utiliserons quasiment que les règles étudiées dans ce chapitre pour déterminer le sens de variation des fonctions proposées.

I. Variations de la somme d'une fonction et d'un réel

1°) Règle

u est une fonction monotone sur un intervalle I.
k est un réel.
La fonction f définie par $f(x)=u(x)+k$ a les mêmes variations que u sur I.

• Si u est croissante sur I, alors f est croissante sur I.
• Si u est décroissante sur I, alors f est décroissante sur I.

2°) Démonstration (ROC)

Hypothèses

H$_1$ u est croissante sur I
H$_2$ $k \in \mathbb{R}$
H$_3$ f est la fonction définie sur I par que $f(x)=u(x)+k$

But : On veut démontrer que f est croissante sur I.
On utilise la définition.

On considère deux réels a et b quelconques dans I tels que $a \leqslant b$.

Il faut démontrer que $f(a) \leqslant f(b)$.

On a : $a \leqslant b$ avec a et b dans I.

Donc d'après H$_1$, on a : $u(a) \leqslant u(b)$

$u(a)+k \leqslant u(b)+k$ $\quad + k$

D'où $f(a) \leqslant f(b)$

Donc f est croissante sur I.

3°) Application : utilisation du sens de variation des fonctions de référence

4°) Exemple

$f : x \mapsto x^2+3$ $\qquad \mathcal{D}_f=\mathbb{R}$

Tableau de variations de *f*

On pose : $u(x)=x^2$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=u(x)+3$.

Donc les variations de f sont les mêmes que celles de u.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Var. de u		↘	0	↗	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Var. de f		↘	3	↗	

(Les valeurs de x ne changent pas ; on ajoute 3 aux ordonnées).

On présente souvent les variations dans un même tableau.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Var. de u		↘	0	↗	
Var. de f		↘	3	↗	

II. Variations du produit d'une fonction par un réel

1°) Règle

u est une fonction définie sur un intervalle I.
k est un réel **non nul**.

La fonction f définie par $f(x) = k \times u(x)$

- a les mêmes variations que u sur I si $k > 0$.
- a les variations contraires de u sur I si $k < 0$.

2°) Démonstration (ROC)

1^er^ cas :

Hypothèses

H$_1$ u est croissante sur I

H$_2$ $k > 0$

H$_3$ f est la fonction définie sur I par $f(x) = k \times u(x)$

But : on veut démontrer que f est croissante sur I.

On utilise la définition.

a et b sont deux réels quelconques dans I tels que $a \leqslant b$.

Il faut démontrer que $f(a) \leqslant f(b)$.

$a \leqslant b$ avec a et b dans I.

Donc d'après H$_1$, on a : $u(a) \leqslant u(b)$ $\quad \times k \ (k > 0)$

$k \times u(a) \leqslant k \times u(b)$

D'où $f(a) \leqslant f(b)$

Donc f est croissante sur I.

2^e^ cas : idem avec $k < 0$ (inversion des signes)

3°) Application : utilisation du sens de variation des fonctions de référence

4°) Exemples

• **Exemple 1**

$f : x \mapsto 2x^2$ $\qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$2 > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Var. de f		↘	0	↗	

• **Exemple 2**

$f : x \mapsto -3x^2$ $\qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$-3 < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Var. de f		↗	0	↘	

Avec les règles du **I** et du **II**, on dispose à présent d'un moyen rapide et efficace pour déterminer les variations de fonctions qui s'écrivent comme produit d'une fonction de référence par un réel ou comme somme d'une fonction de référence et d'un réel.

III. Variations de l'inverse d'une fonction

1°) Règle

u est une fonction définie sur un intervalle I, telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$ $u(x) \neq 0$ et $u(x)$ garde le même signe sur I.

La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ a les variations contraires de u sur I.

$u(x)$ garde le même signe sur I signifie ($\forall x \in \mathrm{I}$ $u(x) > 0$) ou ($\forall x \in \mathrm{I}$ $u(x) < 0$).

2°) Démonstration

Hypothèses

H1 u est croissante sur I

H2 $\forall\, x \in \mathrm{I}\;\; u\,(x) > 0$

H3 f est la fonction définie sur I par $f\,(x) = \dfrac{1}{u\,(x)}$

But : on veut démontrer que f est décroissante sur I.

On utilise la définition.

a et b sont deux réels quelconques dans I tels que $a \leqslant b$.

Il faut démontrer que $f\,(a) \geqslant f\,(b)$.

$a \leqslant b$ avec a et b dans I.

Donc d'après H1 et H2, on a : $0 < u\,(a) \leqslant u\,(b)$

D'où $\dfrac{1}{u(a)} \geqslant \dfrac{1}{u(b)}$ car la fonction « inverse » est décroissante sur $]0\,;+\infty[$

Donc $f\,(a) \geqslant f\,(b)$.

Conclusion : f est décroissante sur I.

On traiterait de manière analogue les autres cas :

u est croissante sur I.	u est décroissante sur I.	u est décroissante sur I.
$\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) < 0$	$\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) > 0$	$\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) < 0$

3°) Notation

On pourra noter $\dfrac{1}{u}$ la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

C'est la « composée de la fonction u suivie de la "fonction inverse" ».

4°) Reformulation de la règle

u est une fonction définie sur un intervalle I telle que $\forall\, x \in \mathrm{I}\;\; u\,(x) \neq 0$.

La fonction $\dfrac{1}{u}$ a les variations contraires de celles de u sur les intervalles où u ne s'annule pas.

5°) Exemple

$f : x \mapsto \dfrac{1}{2x-3}$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\} = \left]-\infty\,; \dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}\,; +\infty\right[$

$u(x) = 2x - 3$

u est une fonction affine de coefficient directeur $2 > 0$ donc u est croissante sur $\mathbb{R}$.

u s'annule pour $x = \dfrac{3}{2}$.

Or la fonction $\dfrac{1}{u}$ a les variations contraires de u sur les intervalles où u ne s'annule pas c'est-à-dire $\left]-\infty\,; \dfrac{3}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{3}{2}\,; +\infty\right[$.

Donc f est décroissante sur $\left]-\infty\,; \dfrac{3}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{3}{2}\,; +\infty\right[$.

x	$+\infty$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
Variations de u		$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$	
Variations de f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

IV. Variations de la racine carrée d'une fonction

1°) Règle

u est une fonction définie sur un intervalle I telle que $\forall\, x \in \mathrm{I}\;\; u\,(x) \geqslant 0$ (on dit que « u est à valeurs positives ou nulles sur I »).

La fonction f définie par $f\,(x) = \sqrt{u(x)}$ a les mêmes variations que u sur I.

Remarques :

L'hypothèse « $\forall x \in \mathrm{I}\ \ u(x) \geqslant 0$ » permet de dire que $\sqrt{u(x)}$ existe pour tout $x \in \mathrm{I}$ (si $u(x) < 0$, $\sqrt{u(x)}$ n'existe pas).

On n'appliquera la règle qu'à des fonctions qui vérifient cette hypothèse (sinon on se place sur des intervalles où u est à valeurs positives ou nulles).

2°) Démonstration

Hypothèses

H1 u est croissante sur I

H2 $\forall x \in \mathrm{I}\ \ u(x) \geqslant 0$

H3 f est la fonction définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$

But : On veut démontrer que f est croissante sur I.

On utilise la définition.

a et b sont deux réels quelconques dans I tels que $a \leqslant b$.
Il faut démontrer que $f(a) \leqslant f(b)$.
$a \leqslant b$ avec a et b dans I.

Donc d'après H1 et H2, on a : $0 \leqslant u(a) \leqslant u(b)$.
D'où : $\sqrt{u(a)} \leqslant \sqrt{u(b)}$ car la fonction « racine carrée » est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc $f(a) \leqslant f(b)$.
Conclusion : f est croissante sur I.

On traiterait de manière analogue le cas où *u* est décroissante sur I.

3°) Notation

On pourra noter $\sqrt{u}$ la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$.

C'est la « composée de la fonction u suivie de la fonction "racine carrée" ».

4°) Reformulation de la règle

u est une fonction définie sur un intervalle I telle que $\forall x \in \mathrm{I}\ \ u(x) \geqslant 0$.

La fonction $\sqrt{u}$ a les mêmes variations que celles de u.

Avec les règles du **III** et du **IV**, on dispose à présent d'un moyen rapide et efficace pour déterminer les variations de fonctions qui s'écrivent comme inverse ou comme racine carrée d'une fonction de référence.

V. Variations de la somme de deux fonctions

1°) Règle

u et v sont deux fonctions définies sur un intervalle I.

- Si u et v sont **croissantes** sur I, alors la fonction f définie par $f(x) = u(x) + v(x)$ est **croissante** sur I.
- Si u et v sont **décroissantes** sur I, alors la fonction f définie par $f(x) = u(x) + v(x)$ est **décroissante** sur I.

La fonction *f* peut être notée *u* + *v*.

2°) Idée de démonstration

Supposons que u et v sont deux fonctions définies sur un même intervalle I et croissantes sur I (démonstration analogue pour u et v décroissantes sur I).
Pour tous réels a et b appartenant à I tels que $a \leqslant b$, on a $u(a) \leqslant u(b)$ et $v(a) \leqslant v(b)$.
En additionnant membres à membres ces deux inégalités de même sens, le sens ne change pas et on obtient :
$u(a) + v(a) \leqslant u(b) + v(b)$.

3°) Mise en garde

Lorsque *u* et *v* n'ont pas le même sens de variation, on ne peut rien en déduire pour la somme.

On ne peut pas conclure lorsque l'une des deux fonctions est croissante et l'autre fonction est décroissante (voir exemple).

4°) Exemple

$f : x \mapsto 2x - 1 + x^2$

Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

On pose :
$u(x) = 2x - 1$
$v(x) = x^2$
$\forall x \in [0\,;+\infty[\ \ f(x) = u(x) + v(x)$

u est une fonction affine de coefficient directeur $2 > 0$ donc croissante sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0\,;+\infty[$.
v est croissante sur $[0\,;+\infty[$ (fonction de référence).

Donc d'après la règle, la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

VI. Variations du produit de deux fonctions

1°) Règle

u et *v* sont deux fonctions définies sur un intervalle I.

• Si *u* et *v* sont deux fonctions croissantes sur un intervalle I et à valeurs positives ou nulles* sur cet intervalle, alors la fonction f définie par $f(x) = u(x) \times v(x)$ est **croissante** sur I.

• Si *u* et *v* sont deux fonctions décroissantes sur un intervalle I à valeurs positives ou nulles* sur cet intervalle, alors la fonction f définie par $f(x) = u(x) \times v(x)$ est **décroissante** sur I.

* « *u* est à valeurs positives ou nulles » signifie « $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) \geqslant 0$ ».

Le mot « valeurs » correspond ici aux valeurs des images, qui sont lues sur l'axe des *y*.
Cette propriété s'interprète graphiquement de la manière suivante : « *u* est à valeurs positives » signifie que la courbe représentative de *u* est au-dessus de l'axe des abscisses.

La fonction *f* peut être notée *uv* (produit des fonctions *u* et *v*).

2°) Démonstration

Analogue à celle de la somme de deux fonctions.

Supposons que *u* et *v* sont deux fonctions définies sur un même intervalle I et croissantes sur I (démonstration analogue pour *u* et *v* décroissantes sur I).

Pour tous réels *a* et *b* appartenant à I tels que $a \leqslant b$, on a $u(a) \leqslant u(b)$ et $v(a) \leqslant v(b)$.

Or *u* et *v* sont à valeurs positives sur I donc $u(a)$, $u(b)$, $v(a)$, $v(b)$ sont positifs ou nuls.

En multipliant membres à membres ces deux inégalités de même sens, le sens ne change pas et on obtient :
$u(a) \times v(a) \leqslant u(b) \times v(b)$.

2°) Application

u et *v* sont deux fonctions définies sur un intervalle I.

On n'appliquera la propriété qu'à des fonctions *u* et *v* qui sont monotones, de même sens de variation et à valeurs positives ou nulles sur un intervalle.

Autrement dit, la règle n'est applicable que pour *u* et *v* à valeurs positives ou nulles (sinon, se placer sur des intervalles sur lesquels *u* et *v* sont à valeurs positives et de même sens de variation).

Avec les règles du **V** et du **VI**, on dispose à présent d'un moyen rapide et efficace pour déterminer les variations de fonction qui s'écrivent comme somme ou comme produit de fonctions de référence.

VII. Complément sur les représentations graphiques

Les deux propriétés ci-dessous sont admises.
Elles se démontrent néanmoins aisément.

1°) Propriété 1

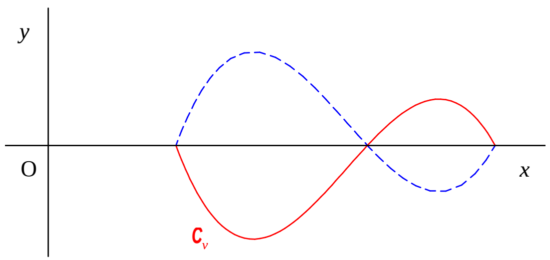
u est une fonction et k un nombre réel fixé.
v est la fonction définie par $v(x) = u(x) + k$.
Dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative de *v* se déduit de celle de *u* par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

Graphique

2°) Propriété 2

u est une fonction.
v est la fonction définie par $v(x) = -u(x)$.
Dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative de *v* se déduit de celle de *u* par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Graphique



Donner un exemple de courbe située entièrement au-dessus de l'axe et un exemple de courbe située au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses.

VIII. Récapitulatif de toutes les règles de sens de variation

***u* et *v* sont deux fonctions définies sur un intervalle I.**
***k* est un réel.**

$u+k$	**Mêmes variations que *u***
$k \times u$	**→ Mêmes variations que *u* si $k > 0$** **→ Variations contraires de *u* si $k < 0$**
$\dfrac{1}{u}$	**Variations contraires de *u* sur les intervalles où *u* ne s'annule pas**
$\sqrt{u}$	**Mêmes variations que *u* sur les intervalles où *u* est positive ou nulle**
$u+v$	**→ Croissante si *u* et *v* sont croissantes** **→ Décroissante si *u* et *v* sont décroissantes**

IX. Exemple de mise en œuvre de toutes les règles

$f : x \mapsto \boxed{x^2+1} + \boxed{\dfrac{4}{x-1}}$

Étudier le sens de variation de *f* sur $]-\infty\ ;0]$.

	Règles utilisées
1) $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$. $x \mapsto x^2+1$ est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$.	fonction de référence $u+k$
2) $x \mapsto x-1$ est croissante sur $]-\infty\ ;0]$. $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$. $x \mapsto \dfrac{4}{x-1}$ est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$.	fonction affine $\dfrac{1}{u}$ $k \times u$
3) *f* est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$.	$u+v$

X. Application des règles : variations d'une fonction homographique

1°) Définition

On appelle **fonction homographique** une fonction *f* définie par une expression de la forme $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c, d sont des réels tels que $a \neq 0$.

Une fonction homographique est le quotient de deux fonctions affines.

2°) Propriété

a, b, c, d sont des réels tels que $a \neq 0$.

$f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$

On peut écrire $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta}{cx+d}$ où α et β sont deux réels.

Cette expression est appelée **forme canonique** de la fonction homographique *f* car la variable *x* ne figure qu'à un seul « endroit ».

3°) Variations d'une fonction homographiques

On utilise la forme canonique et les règles sur le sens de variation étudiées dans ce chapitre (voir exercices).

4°) Exemple de mise sous forme canonique d'une fonction homographique

$f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$

On peut écrire que *x* c'est aussi $(x+2)-2$.
On peut donc transformer l'écriture du numérateur.

$$f(x)=\frac{3\left[(x+2)-2\right]-1}{x+2}$$

$$=\frac{3(x+2)-7}{x+2}$$

$$=\frac{3\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}-\frac{7}{x+2}$$

$$=3-\frac{7}{x+2}$$