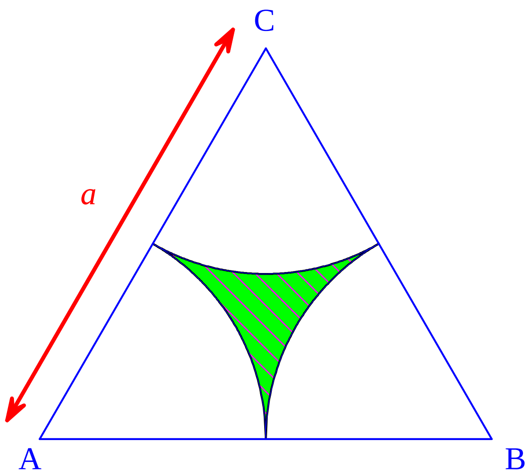
$1^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le vendredi 13 septembre 2013

I. Le triangle équilatéral ci-dessous a pour côté a en centimètres ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
Les arcs de cercles ont pour centres les sommets du triangle.



On ne demande pas de reproduire la figure.

1°) Exprimer en fonction de a et présenter sous forme factorisée l'aire S du domaine colorié en cm^2.

2°) Dans cette question, on prend $a = 10$.
À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie de S au centième.

II. Écrire chaque polynôme sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

$P(x) = \left(x^2 - 2\right)^2 - 1$;

$Q(x) = \left(x^2 - 3\right)^2 - \left(x^2 + 1\right)^2$.

Conseils et recommandations

• Le devoir tout entier doit tenir sur une copie simple recto-verso.
Cette contrainte est imposée pour favoriser la concision.

• On prendra soin de bien mettre en évidence tous les résultats en les encadrant en rouge à la règle.

• Ne rien écrire sur l'énoncé.

• Pour la rédaction, on rappelle la consigne : une idée, une égalité par ligne.

I.

Lire les fiches sur :

- les valeurs approchées en mathématiques
- arrondi automatique d'un réel
- les calculs de longueurs

Pour cet exercice, seront jugées la présentation des calculs et la rigueur dans les notations.

Il n'y a pas besoin de refaire la figure ni de nommer des points.

II.

Détailler un peu les grandes étapes des calculs.

Présenter les calculs en colonne.

Corrigé du DM pour le 13-9-2013

I.

Cet exercice aborde les points suivants :

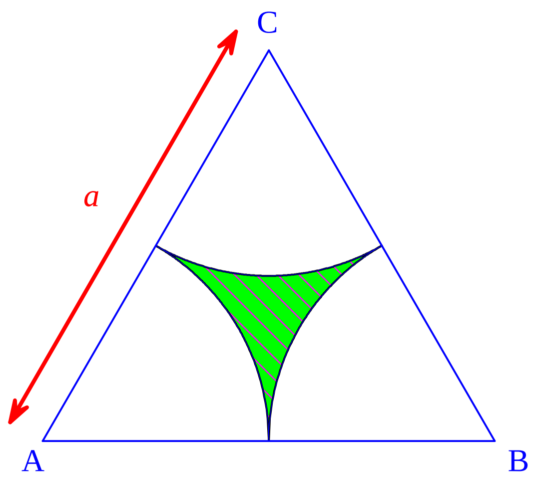
- calcul d'aire

- calcul littéral (présentation des calculs, utilisation de lettres)

- travail sur valeur approchée et valeur exacte

- précision du vocabulaire (secteur circulaire, aire d'un secteur circulaire et non d'un arc de cercle, aire d'un disque et non aire d'un cercle)

1°) **Exprimons en fonction de *a* l'aire *S* du domaine colorié en cm^2.**



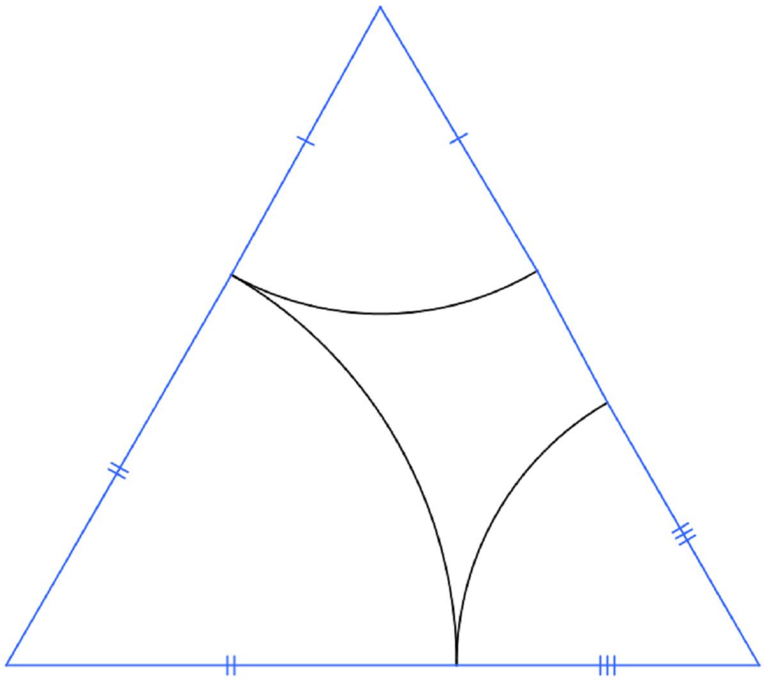
• On commence par faire une analyse de la figure.

Le domaine est limité par trois arcs de cercle.

On doit expliquer pour quoi les arcs de cercles ont tous le même rayon $\left(\dfrac{a}{2}\right)$.

Rien ne dit en effet dans l'énoncé que les arcs de cercle joignent les milieux des côtés du triangle.
On doit donc le dire, éventuellement le démontrer.

La figure ci-dessous illustre le cas où les arcs de cercles n’ont pas le même rayon.
On voit qu’il y a un problème.



Voici une démonstration possible du fait que les rayons des trois arcs de cercles sont égaux.

On note r_{A}, r_{B}, r_{C} les rayons respectifs des arcs de cercles de centres A, B et C.

On a le système (I) suivant :

$$\begin{cases} r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{B}} = a & (1) \\ r_{\mathrm{B}} + r_{\mathrm{C}} = a & (2) \\ r_{\mathrm{C}} + r_{\mathrm{A}} = a & (3) \end{cases}$$

Par soustraction membre à membre de (1) à (2), on obtient $r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{C}} = 0$ donc $r_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{C}}$.

Par soustraction membre à membre de (2) à (3), on obtient $r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}} = 0$ donc $r_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{B}}$.

D’où $2r_{\mathrm{A}} = a$, soit $r_{\mathrm{A}} = \frac{a}{2}$.

On a donc : $r_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{B}} = r_{\mathrm{C}} = \frac{a}{2}$.

• **On passe à la phase calcul.**

On tâche de donner le plus vite possible l'aire S sous la forme d'une seule expression (comme on apprend à le faire en 6^e ou en 5^e).

On avait facilement l'idée suivante :

$$S = \text{aire de ABC} - \text{aire des trois secteurs angulaires*}$$

*** Par définition, un secteur circulaire est limité par deux rayons d'un cercle et l'arc de cercle joignant les extrémités.**

Il s'agit d'un calcul d'aire ; on pouvait se référer à la fiche sur les formules de longueurs, aires et volumes.

Le problème est de trouver une formule donnant l'aire d'un secteur circulaire.

→ Un agenda ne donne pas l'aire d'un secteur circulaire. Il fallait donc se tourner vers un livre : manuel, dictionnaire (rubrique formules d'aires et de volumes).

→ On pouvait aussi chercher sur Internet. On trouvait sur le site un formulaire donnant la formule de l'aire d'un secteur circulaire. On voyait que la formule fait intervenir la mesure en radians de l'angle du secteur circulaire. Ce pouvait être l'occasion de commencer à travailler le radian.

→ Sinon, on pouvait aussi trouver la formule par soi-même en utilisant la proportionnalité.

Nous verrons en fait que nous pouvons nous passer de la formule donnant l'aire d'un secteur circulaire.

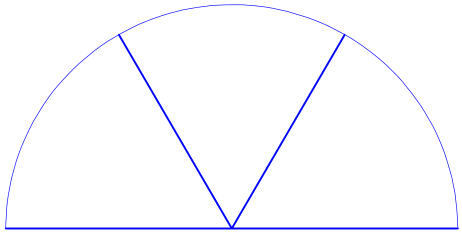
On applique les formules d'aire en situation : pas d'utilisation de lettres b, h, r … si l'on n'a pas dit ce que ces lettres représentaient.
Par exemple, on n'écrit pas : $\dfrac{b \times h}{2}$ si l'on n'a pas défini les lettres b et h.

Aire du triangle ABC

Par hypothèse, on sait que le triangle ABC est équilatéral.
Ses hauteurs ont toutes pour longueur $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (formule à connaître par cœur qui se démontre à l'aide du théorème de Pythagore).

Somme des aires des secteurs circulaires

Les trois secteurs angulaires ont la même aire car ils ont le même rayon et ont le même angle au centre de 60°.
Donc la somme des aires des trois secteurs angulaires est égale à l'aire d'un demi-disque de rayon $\dfrac{a}{2}$ (principe de découpage-recomposition comme l'illustre la figure suivante).



Les trois secteurs disposés ainsi forment donc un demi-disque de rayon $\frac{a}{2}$.

Idées d'élèves trouvées dans les copies :

$\longrightarrow$ On peut dire que la somme des angles des secteurs circulaires est égale à 180° (par somme de trois angles de 60° ou par somme des angles d'un triangle).

$\longrightarrow$ Dans un triangle équilatéral, tous les angles sont égaux et mesurent 60°. Or « un cercle est de 360° » donc $\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$.

Par conséquent, l'aire de chacun des 3 secteurs circulaires représente $\frac{1}{6}$ de l'aire d'un disque de rayon $\frac{a}{2}$

On sait que l'aire d'un disque de rayon R est égale à πR^2 etc...

Expression de S

$$S=\frac{a\times\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}-\frac{\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}$$
$$=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi a^2}{8}$$
$$=\frac{2a^2\sqrt{3}-\pi a^2}{8}$$
$$=\boldsymbol{\frac{a^2\left(2\sqrt{3}-\pi\right)}{8}}$$

(on ne met pas d'unité puisque l'énoncé dit que S est l'aire en cm^2 du domaine coloré)

2°) **On prend *a* = 10.**

Donnons la valeur arrondie de *S* au centième.

$$S=\frac{100\left(2\sqrt{3}-\pi\right)}{8}$$

$$S=\frac{25}{2}\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$$ (valeur exacte)

Avec la calculatrice, on obtient :

$S=4,03136201...$

Donc $\boldsymbol{S\approx 4,03}$ (valeur arrondie au centième)

• Pour aller plus loin, je recommande de réaliser la figure pour $a = 10$ avec *Geogebra* (intéressant pour la construction d'arcs de cercles) ; malheureusement, on ne peut pas faire afficher l'aire du domaine donc il n'y a pas moyen de vérifier.

• On aurait pu aussi s'intéresser au périmètre du domaine coloré.

On trouve que le périmètre est égal à la moitié du périmètre d'un cercle de rayon $\frac{a}{2}$ soit $\frac{\pi a}{2}$.

Attention à la présentation des calculs : position de la barre de fraction par rapport au signe =, particulièrement pour des quotients à étage. On écrit les barres de fraction horizontalement (pas de barre oblique).

II. Factorisons les polynômes en facteurs du premier degré.

Cet exercice aborde le calcul littéral.

$$\begin{aligned}P(x) &= \left(x^2-2\right)^2-1\\ &= \left[\left(x^2-2\right)-1\right]\left[\left(x^2-2\right)+1\right]\\ &= \left(x^2-3\right)\left(x^2-1\right)\\ &= \mathbf{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(x) &= \left(x^2-3+x^2+1\right)\left(x^2-3-x^2-1\right)\\ &= \left(2x^2-2\right)\times\left(-4\right)\\ &= -8\left(x^2-1\right)\\ &= \mathbf{-8\left(x-1\right)\left(x+1\right)}\end{aligned}$$

On peut vérifier les résultats à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Remarque :

$P(x)$ est un polynôme de degré 4.

$Q(x)$ est un polynôme de degré 2.

On écrit : $\deg P(x) = 4$; $\deg Q(x) = 2$.