**1$^{\text{ère}}$ S1**

# Devoir pour le vendredi 15 février 2013

## I. La légende de l'échiquier

En Inde, une légende vieille de 1500 ans raconte comment un brahmane (membre d'une caste religieuse) du nom de Sessa fut récompensé pour avoir inventé le jeu d'échec.
Le roi des Indes fut tant émerveillé lorsque Sessa lui apprit le jeu que le roi lui proposa de choisir la récompense qu'il souhaitait.
Le brahmane demanda alors la quantité de grains de blé qu'il serait nécessaire pour remplir les 64 cases d'un échiquier en respectant la condition suivante : chaque case doit contenir deux fois plus de grains de blé que la précédente sachant que la première case ne contient qu'un seul grain.

Soit : 1 grain de blé sur la première case
2 grains sur la seconde
4 grains (soit 2 fois 2) sur la troisième
8 grains (2 fois 2 fois 2) sur la quatrième
16 grains (2 fois 2 fois 2 fois 2) sur la cinquième etc ...

Le roi accepta la demande de Sessa en se disant que celle-ci était plutôt modeste.
Mais lorsqu'un arithméticien résolut le problème, le roi se rendit compte que le brahmane l'avait dupé et que la quantité de grains de blé qu'il demandait était impossible à fournir.

1°) Exprimer la quantité de grains *S* nécessaire pour remplir tout l'échiquier sous la forme d'une somme de puissances de 2.

2°)

a) Vérifier que pour tout entier naturel *k* on a $2^k = 2^{k+1} - 2^k$.

b) En écrivant cette égalité pour chaque terme de la somme *S*, déterminer une écriture simplifiée de *S*.

c) Utiliser la calculatrice d'un ordinateur ou une calculatrice en ligne sur Internet* pour déterminer le nombre exact de grains de blé pour remplir l'échiquier.

3°) Dans $1\ \text{m}^3$, on peut ranger environ 1,5 millions de grains de blé. Le roi dispose d'un grand grenier de 5 mètres de large sur 10 mètres de long.

Quelle hauteur faut-il prévoir si l'on désire stocker la quantité de grains de blé que recevra Sessa ?
Exprimer le résultat en km.

Comparer cette longueur à la distance de la terre au soleil.

Mais l'histoire finit mal pour le brahmane. L'arithméticien du roi conseille d'enfermer Sessa dans son propre piège en lui demandant de compter lui-même les grains de blé.

4°) Sachant qu'il faudra 6 mois pour compter $1\ \text{m}^3$, combien d'années lui faudrait-il pour dénombrer l'ensemble de sa récompense ?

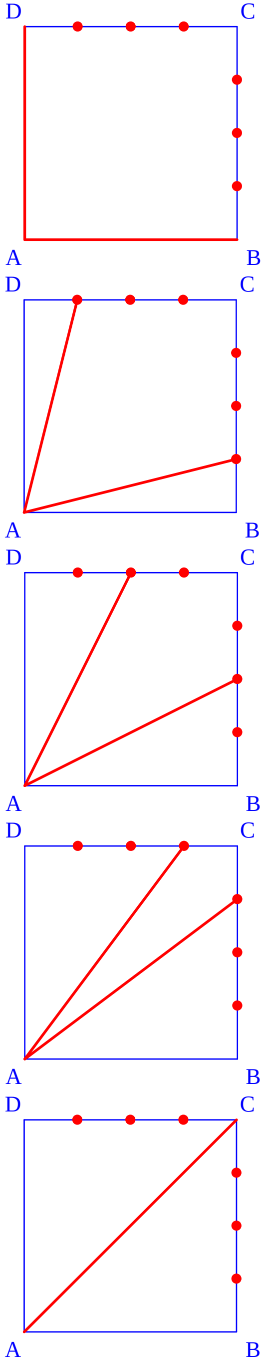
* Voir aide en annexe.

**II.** Soit ABCD un carré.

Le but de l'exercice est l'étude d'un algorithme permettant de réaliser une figure dynamique dans ce carré pour laquelle deux segments se rapprochent de la diagonale à la manière des nervures d'une feuille qui se ferme.

On partage les segments [BC] et [CD] en *n* segments de même longueur où *n* est un entier naturel avec $n \geqslant 2$.

Les figures ci-contre illustrent le cas $n = 4$.




On souhaite que l'utilisateur saisisse une valeur de *n* en entrée et que s'affichent successivement les figures ci-contre permettant de voir le segment rouge en « animation » (chaque fois le segment s'efface pour laisser place au suivant).

Écrire l'algorithme en langage naturel puis le programme sur calculatrice.

On pourra se placer dans un repère orthonormé dont l'origine coïncide avec A et tel que les points B et D aient pour coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1).

On pourra également compléter la figure par des symétries afin d'obtenir une figure plus esthétique.

# Aide :

Pour la calculatrice de l'ordinateur, on doit aller dans « Tous les programmes » puis dans « Accessoires ».
On sélectionne « calculatrice ». On doit enfin sélectionner l'affichage scientifique.

Il y a un raccourci clavier possible (Alexandre Contassot le 5 mars 2013).

On peut aussi taper « Calculatrice Google ».

# Corrigé du devoir pour le 15-2-2013

## I. La légende de l'échiquier

1°) **Exprimons la quantité de grains $S$ nécessaire pour remplir tout l'échiquier.**

| | |
|---|---|
| $1^{\text{ère}}$ case | 1 grain |
| $2^{\text{e}}$ case | 2 grains |
| $3^{\text{e}}$ case | 4 grains |
| $4^{\text{e}}$ case | 8 grains |
| | |
| | |
| | |
| | |
| $64^{\text{e}}$ case | $2^{63}$ |

$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$

2°)

a) **Vérifions que pour tout entier naturel $k$ on a $2^k = 2^{k+1} - 2^k$.**

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - 2^k &= 2 \times 2^k - 2^k \\ &= 2^k \times (2-1) \\ &= 2^k \times 1 \\ &= 2^k \end{aligned}$$

b) **Déterminons une écriture simplifiée de $S$.**

$k = 0 \quad 2^1 - 2^0 = 2^0$
$k = 1 \quad 2^2 - 2^1 = 2^1$
$k = 2 \quad 2^3 - 2^2 = 2^2$

…

$k = 63 \quad 2^{64} - 2^{63} = 2^{63}$

$S = 2^{64} - 1$

c) **Déterminons le nombre exact de grains de blé pour remplir l'échiquier.**

Le nombre exact de grains de blé pour remplir l'échiquier est égal à 18 446 744 073 709 551 615.

3°) Dans 1 $\text{m}^3$, on peut ranger environ $1,5 \times 10^6$ grains de grains de blé.

Le roi dispose d'un grand grenier de 5 mètres de large sur 10 mètres de long.

**Déterminons la hauteur à prévoir pour stocker la quantité de grains de blé que recevra Sessa.**

Le volume à prévoir pour stocker les grains :

$$\text{V} = \frac{\text{nombre total de grains}}{\text{nombre de grains dans 1 m}^3}$$

$$\text{V} = \frac{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615}{1,5 \times 10^6} \quad \text{ou} \quad \text{V} = \frac{2^{64} - 1}{1\,500\,000}$$

(résultat intermédiaire : $\text{V} = 1\,229\,782\,938\,247,03\ldots\ \text{m}^3$ pas utile)

Soit $h$ la hauteur (en mètres) du grenier pour stocker tous les grains.

$h = \dfrac{\text{V}}{l \times L}$ où $l$ et $L$ désignent respectivement la largeur et la longueur en mètres du grenier

$$\begin{aligned} h &= \frac{\dfrac{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615}{1,5 \times 10^6}}{5 \times 10} \\ &= \frac{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615}{1,5 \times 10^6 \times 5 \times 10} \\ &= \frac{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615}{15 \times 10^7} \\ &\approx 245\,956\,587\,649 \text{ m} \end{aligned}$$

La hauteur sera donc environ égale à 245 956 587,649 km.

**Comparons cette longueur à la distance de la terre au soleil.**

La distance Terre-Soleil est de $d$ = 149 597 870 km environ.

$$\begin{aligned} \frac{h}{d} &= \frac{245\,956\,587,649}{149\,597\,870} \\ &\approx 1,64 \end{aligned}$$

On en déduit que la hauteur du grenier sera environ 1,64 fois la distance séparant la terre au soleil.

4°) **Calculons le nombre d'années qu'il faudra au brahmane pour dénombrer l'ensemble des grains.**

On sait qu'il faudra 6 mois au brahmane pour compter 1 $m^3$.

$$\text{volume de grains} \times \text{nombre d'années pour compter 1 m}^3 = \frac{V}{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 6{,}15 \times 10^{12} \text{ années}$$

Le brahmane sera mort avant d'avoir fini de compter.

(calcul : $\frac{2^{64}-1}{1\,500\,000} \times \frac{1}{2}$)

---

## II. Algorithme permettant de réaliser une figure dynamique dans un carré (à la manière d'un « pop-up »)

**Constance Delin :**

Effacer le dessin
Saisir *n*
*h* prend la valeur $\frac{1}{n}$
**Pour** *k* allant de 0 à *n* avec un pas de 1 **Faire**
  Tracer les segments joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (0 ; 1), (1 ; 0) et (1 ; 1), (1 ; 1) et (0 ; 1), (0 ; 1) et (0 ; 0)
  Tracer les segments joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (*kh* ; 1) ; (0 ; 0) et (1 ; *kh*)
  Effacer le dessin
**FinPour**

**Alexandre Contassot :**

**Entrée :**
Saisir *n*

**Initialisations :**
*h* prend la valeur $\frac{1}{n}$
Tracer le segment reliant les points de coordonnées (0 ; 0) et (1 ; 0)
Tracer le segment reliant les points de coordonnées (1 ; 0) et (1 ; 1)
Tracer le segment reliant les points de coordonnées (1 ; 1) et (0 ; 1)
Tracer le segment reliant les points de coordonnées (0 ; 1) et (0 ; 0)

**Traitement et sorties :**
**Si** $n \leqslant 2$
  Alors afficher « Erreur »
  **Sinon**
  **Pour** *i* allant de 0 à *n* **Faire**
    Tracer le segment reliant les points de coordonnées (0 ; 0) et (1 ; *hi*)
    Tracer le segment reliant les points de coordonnées (0 ; 0) et (*hi* ; 1)
    Effacer le dessin
    Tracer le segment reliant les points de coordonnées (0 ; 0) et (1 ; 0)
    Tracer le segment reliant les points de coordonnées (1 ; 0) et (1 ; 1)
    Tracer le segment reliant les points de coordonnées (1 ; 1) et (0 ; 1)
    Tracer le segment reliant les points de coordonnées (0 ; 1) et (0 ; 0)
  **FinPour**
**FinSi**

**Mathis Bourrelier :**

**Initialisations :**
Xmin prend la valeur 0
Xmax prend la valeur 1
Ymin prend la valeur 0
Ymax prend la valeur 1

**Entrée :**
Saisir *n*

**Traitement et sorties :**
*h* prend la valeur $\frac{1}{n}$
**Pour** *k* allant de 0 à *n* **Faire**
  Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 1) et (1 ; 1)
  Tracer le segment joignant les points de coordonnées (1 ; 0) et (1 ; 1)
  Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (1 ; *kh*)
  Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (*kh* ; 1)
  **Pour** F allant de 0 à 100 **Faire**
  **FinPour**
  Effacer le dessin
**FinPour**

**Thibault Lecroart :**

**Entrée :**
Saisir $n$

**Traitement et sorties :**
Tracer le carré ABCD avec A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(1 ; 1), D(0 ; 1)
**Pour** $k$ allant de 0 à $n$ **Faire**

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et $\left(\frac{k}{n};1\right)$

Tracer le segment joignant les points de coordonnées $\left(1;\frac{k}{n}\right)$ et (0 ; 0)

Effacer le dessin

**FinPour**

**Voici le programme que l'on peut faire sur la calculatrice TI (Alexandre Contassot) :**

```
: Prompt N
: If N ⩽ 2
: Then
: Disp "Erreur"
: Else
: 1/N → H
: Ligne(0, 0, 1, 0)
: Ligne(1, 0, 1, 1)
: Ligne(1, 1, 0, 1)
: Ligne(0, 1, 0, 0)
: For(I,0,N)
: Ligne(0, 0, 1, H∗I)
: Ligne(0, 0, H∗I, 1)
: Effdessin
: Ligne(0, 0, 1, 0)
: Ligne(1, 0, 1, 1)
: Ligne(1, 1, 0, 1)
: Ligne(0, 1, 0, 0)
: End
: End
```