

Le problème du Grand Duc de Toscane

- Les jeux de dés sont non seulement les ancêtres étymologiques des probabilités (le hasard est un mot d'origine arabe *az-zarh* : le dé) mais aussi les ancêtres mathématiques. En effet, parmi les premières questions proprement probabilistes répertoriées, la plupart font référence aux jeux de dés.

Ainsi le Grand Duc de Toscane, qui jouait beaucoup, remarqua qu'en lançant trois dés et en totalisant les points on obtenait plus souvent 10 que 9.

Cette constatation l'étonnait car 10 et 9 s'écrivent d'autant de manières différents comme somme de trois dés.

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$$

et

$$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4$$

C'est Galilée (1564-1642) qui élucida le problème.

- Jouons ou plutôt simulons une succession de lancers de trois dés à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires d'une calculatrice.

Entrée :

Saisir N

Initialisations :

E prend la valeur 0 (compteur des 9 initialisé à 0)

D prend la valeur 0 (compteur des 10 initialisé à 0)

Traitement :

Pour *i* allant de 1 à N **Faire**

 S prend la valeur de $\text{Rand}(1, 6) + \text{Rand}(1, 6) + \text{Rand}(1, 6)$

Si S = 9

 Alors E prend la valeur E + 1

Sinon

Si S prend la valeur 10

 Alors D prend la valeur D + 1

FinSi

FinSi

FinPour

Sortie :

Afficher 9 et $\frac{E}{N}$

Afficher 10 et $\frac{D}{N}$

i est incrémenté de 1 (automatique avec une boucle « Pour »).

Voici quelques résultats :

Nombre de lancers	100	500	800	1000	1000	1500
Fréquence d'apparition de 9	0,05	0,15	0,11125	0,12	0,107	0,114
Fréquence d'apparition de 10	0,11	0,102	0,1225	0,127	0,118	0,140666...

La convergence est très lente.

• Le Grand Duc de Toscane avait une intuition naturelle de la loi faible des grands nombres qui précise que lorsque l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire la fréquence d'apparition d'un événement se rapproche de la probabilité de l'événement.

Le modèle choisi par le Grand Duc n'était pas validé par l'expérience.

Précisons le modèle du Grand Duc :

Le Grand Duc lance les trois dés en même temps et considère qu'ils sont indiscernables. Dans le modèle, il y a : $C_6^3 + 2 \times C_6^2 + C_6^1 = 56$ issues.

En munissant l'ensemble des issues de la loi équirépartie, la probabilité de l'événement « la somme vaut 9 » ainsi que l'événement « la somme vaut 10 » est : $\frac{6}{56} = \frac{3}{28} \approx 0,10701$.

Le « bon » modèle :

Il faut considérer l'ordre dans lequel apparaissent les points, autrement dit, considérer que les dés sont discernables. Une issue est alors un triplet (i, j, k) avec $0 \leq i \leq 6, 0 \leq j \leq 6, 0 \leq k \leq 6$.

Il y a 6^3 issues possibles.

$$P(\{(i, j, k)\}) = \begin{cases} \frac{3!}{6^3} = \frac{6}{216} & \text{si } i, j, k \text{ sont 2 à 2 distincts} \\ \frac{3}{216} & \text{si } i = j \neq k \text{ ou } i \neq j = k \text{ ou } i = k \neq j \\ \frac{1}{216} & \text{si } i = j = k \end{cases}$$

$$P(\text{"somme = 9"}) = \frac{6+6+3+3+6+1}{216} = \frac{25}{216} \approx 0,1157$$

$$P(\text{"somme = 10"}) = \frac{6+6+3+6+3+3}{216} = \frac{27}{216} = 0,125$$

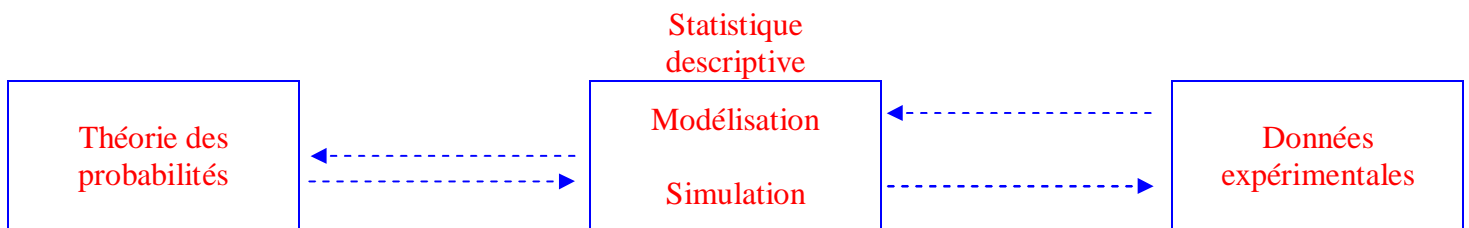
Compléments sur modèle et simulation :

Définition de modèle du dictionnaire :

- 1°) On appellera modèle une réalité dont l'existence sert de référence ou de mesure à d'autres réalités considérées comme secondes.
- ⋮
- 4°) Épistémologie : construction théorique susceptible de fournir une certaine intelligibilité d'un domaine particulier et déterminé de la réalité. On parle de modèle aussi bien en mathématiques qu'en physique en biologie ou dans les sciences de l'homme.

En fait, un modèle est tantôt une réalité exemplaire qui s'impose ou se propose à l'imitation mais tantôt et l'imitation se trouve inversée la reproduction d'une chose à une échelle différente : mode réduit...

Schématisons ce qui se passe en statistique :



En parlant de modèle on va produire des données en simulant et il devient inutile de faire des relevés.

- Bien sûr, le problème qui se pose est celui de la validation du modèle retenu pour un phénomène donné. Tant que la réalité ne contredit pas le modèle utilisé dans la simulation, on le considère comme valide.
- Enfin, si plusieurs modèles n'ont pas été invalidés, on les considère comme valides et on choisit le plus simple.

Bibliographie : Probabilités en 1^{ère}

- *Les certitudes du hasard.* Arthur Engel. Aléas Éditeurs.
- *Enseigner les probabilités au lycée.* Réseau des IREM.
- *Probabilités et statistiques : de l'intuition aux applications.* Jacques Harshong, Diderot Éditeur.
- *En passant par le hasard... Les probabilités de tous les jours.* Gilles Pagès et Claude Bourzitat, Vuibert.
- *Les probabilités.* Albert Jacquard, Que sais-je ?
- *L'empereur et la girafe.* Claudine Robert, Diderot Éditeur.
- *Les structures du hasard : les probabilités et leurs usages.* Jean-Louis Boursin, Points Sciences.
- *Simulation et statistique en seconde.* Irem Paris XIII (Villetaneuse)

Site Internet : <http://perso.wanadoo.fr/jpq/proba>