1$^{\text{ère}}$ S **Exercices sur les fonctions trigonométriques**

1 Dans chaque cas, démontrer que la fonction *f* dont l'expression est donnée est périodique de période T.

1°) $f(x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ et $T = \frac{2\pi}{5}$

2°) $f(x) = \cos 6x + \sin 3x$ et $T = \frac{2\pi}{3}$

3°) $f(x) = \cos^2 x - 3\sin(2x)$ et $T = \pi$.

2 Dans chaque cas, calculer $f'(x)$.

1°) $f(x) = 2\cos(5x)$

2°) $f(x) = 4\sin^3 x$

3°) $f(x) = \frac{3}{2+\cos x}$

3 On considère la fonction *f* définie par $f(x) = 3 + 4\cos(5x)$.

Démontrer que *f* est bornée sur $\mathbb{R}$.

4 On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
Calculer $f'(x)$.

5 On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \cos(2x)$.

Etudier les variations de *f* sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

6 On considère la fonction *f* définie par $f(x) = 4\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Démontrer que *f* est périodique.

Corrigé

$\boxed{1}$ On refait la démonstration dans chaque cas.
Vérifier sur la calculatrice graphique (mettre la calculatrice en mode radian).

1°) $\boldsymbol{f(x)=\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{5}$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x+\mathrm{T}) &= f\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)\\ &=\cos\left[5\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right]\\ &=\cos\left(2\pi+5x-\frac{\pi}{4}\right)\\ &=\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

On en déduit que f est périodique de période $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{5}$.

2°) $\boldsymbol{f(x)=\cos 6x+\sin 3x}$ et $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{3}$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x+\mathrm{T}) &= f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\\ &=\cos\left[6\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]+\sin\left[3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\ &=\cos(6x+2\pi)+\sin(3x+2\pi)\\ &=\cos 6x+\sin 3x\\ &= f(x)\end{aligned}$$

On en déduit que f est périodique de période $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{3}$.

3°) $\boldsymbol{f(x)=\cos^2 x-3\sin(2x)}$ et $\mathrm{T}=\pi$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x+\mathrm{T}) &= f(x+\pi)\\ &=\cos^2(x+\pi)-3\sin\left[2(x+\pi)\right]\\ &=\left[\cos(x+\pi)\right]^2-3\sin(2x+2\pi)\\ &=(-\cos x)^2-3\sin 2x\\ &=\cos^2 x-3\sin 2x\\ &= f(x)\end{aligned}$$

On en déduit que f est périodique de période $\mathrm{T}=\pi$.

$\boxed{2}$ 1°) **$f(x) = 2\cos(5x)$** $\quad D_f = \mathbb{R}$

On applique la règle du cours : $\left[\cos(ax+b)\right]' = -a\sin(ax+b)$ (où a et b sont deux réels).
On prend : $a = 5$ et $b = 0$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2(-5\sin 5x) = -10\sin(5x)$

2°) **$f(x) = 4\sin^3 x$** $\quad D_f = \mathbb{R}$

On pose $u(x) = \sin x$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction de référence) et $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = \cos x$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 4 \times \left[u(x)\right]^3$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle sur les opérations algébriques pour les fonctions dérivables).

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= 4 \times 3 \times u'(x) \times \left[u(x)\right]^2 \\ &= 12 \times u'(x) \times \left[u(x)\right]^2 \\ &= 12 \times \cos x \times \sin^2 x \end{aligned}$$

Attention à bien différencier dans le cours, dérivée de fonction et dérivé d'une forme (du type $x^3 \longrightarrow 3x^2$ et $u^n \longrightarrow nu'u^{n-1}$)

On utilise la formule de dérivation suivante : $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$.

3°) **$f(x) = \dfrac{3}{2+\cos x}$** $\quad D_f = \mathbb{R}$ (la recherche de cet ensemble de définition est quasiment évidente)

On pose $u(x) = 2 + \cos x$.
$\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = -\sin x$

On a : $f(x) = \dfrac{3}{u(x)}$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle sur les opérations algébriques pour les fonctions dérivables).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\frac{3\,(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{3\sin x}{(2+\cos x)^2}$$

On applique la formule de dérivée de $\left(\dfrac{k}{u}\right)' = -k\dfrac{u'}{u^2}$ (en écrivant que $\dfrac{k}{u} = k \times \dfrac{1}{u}$)

$\boxed{3}$ **$f(x) = 3 + 4\cos(5x)$**.

On démontre que $\forall x \in \mathbb{R} \; -1 \le f(x) \le 7$ (méthode des encadrements successifs).

Solution détaillée :

Rappel :

On dit qu'une fonction *f* définie sur ***D*** est bornée pour exprimer qu'il existe deux réels *m* et *M* tels que pour tout réel $x \in$ ***D***, on ait $m \le f(x) \le M$.

Dire que *f* est bornée par *m* et *M* signifie que *f* est minorée par un nombre *m* et que *f* est majorée par un nombre *M*.

Graphiquement, dire que *f* est bornée par *m* et *M* signifie que la courbe représentative de *f* est comprise dans la zone située entre les droites d'équation $y = m$ et $y = M$ (comme ces deux droites sont parallèles, on parle de « bande » délimitée par ces deux droites).

On cherche donc à encadrer $f(x)$ par deux nombres fixes.

On procède par encadrements successifs.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \le \cos 5x \le 1$

(on utilise le fait que la fonction cosinus est bornée sur $\mathbb{R}$ par – 1 et 1 ; le cosinus de n'importe quoi est compris entre – 1 et 1 au sens large)

$\times 4$

$-4 \le 4\cos 5x \le 4$

$+ 3$

$-1 \le 3 + 4\cos 5x \le 7$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \le f(x) \le 7$

On en conclut que *f* est bornée sur $\mathbb{R}$ (– 1 est un minorant de *f* ; et 7 est un majorant de *f*).

$\boxed{4}$ **$f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$**

$f(x)$ existe si et seulement si $\cos x \neq 0$

si et seulement si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Explication : les points images des solutions de l'équation $\cos x = 0$ sont B et B′ (en utilisant les notations traditionnelles du cercle trigonométrique) ; les réels associés sont donc $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} + \pi$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi$.

Tous ces nombres peuvent donc s'écrire sous la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Attention à la notation de l'ensemble avec accolades.

$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

(On applique la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = \cos x$ et $u'(x) = -\sin x$).

$\boxed{5}$ Étude d'une fonction trigonométrique simple

$\boldsymbol{f(x) = \cos(2x)} \qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle du cours)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -2 \sin 2x = -4 \sin x \times \cos x$

On utilise la formule de duplication du sinus : sin 2*x* = 2 sin *x* cos *x*.

On dresse ensuite le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de sin x	0	+		+	0
Signe de cos x		+	0	–	
Signe de $f'(x)$	0	+	0	–	
Variations de f	1	↘	–1	↗	1

La dérivée de *f* s'annule en 0, $\frac{\pi}{2}$ et π.

On calcule les extremums de *f* sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

$f(0) = \cos(2\times 0) = \cos 0 = 1\ ;\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1\ ;\ f(\pi) = \cos(2\times\pi) = \cos 2\pi = 1$

Le maximum de *f* sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ est égal à 1 ; le minimum de *f* sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ est égal à – 1.

f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.

Représenter la courbe de la fonction *f* sur calculatrice graphique (en se plaçant en mode radian).

$\boxed{6}$ **$f : x \mapsto 4\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$**

f est périodique de période $T = 4\pi$ (le résultat nous est fournit par une règle du cours ; mais j'aime mieux que l'on refasse la démonstration complète).

Solution détaillée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{aligned} f(x+T) &= f(x+4\pi) \\ &= 4\sin\left(\frac{x+4\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que *f* est périodique de période $T = 4\pi$.