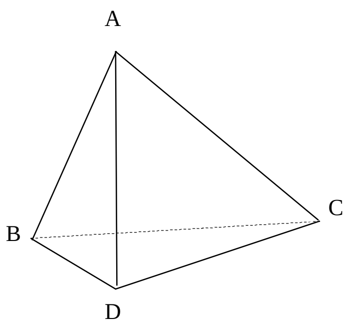
TS — Exercices sur les barycentres

1 Soit ABCD un tétraèdre (c'est-à-dire une pyramide à base triangulaire). On note G l'isobarycentre des points A, B, C, D.



1°) On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [BC], [AD], [AC], [BD].

Démontrer que les droites (IJ), (KL), (MN) sont concourantes au point G.

2°) On note A', B', C', D' les centres de gravité respectifs des BCD, ACD, ABD et ABC.
Démontrer que G est le point de concours des droites (AA'), (BB'), (CC'), (DD').
Démontrer que le tétraèdre A'B'C'D' est l'image du tétraèdre ABCD par une homothétie que l'on précisera.

On peut retenir que le centre de gravité d'un tétraèdre est le point d'intersection de sept droites remarquables de ce tétraèdre.

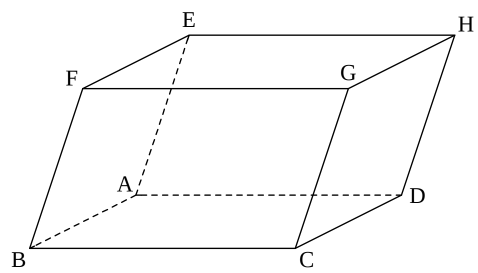
2 Soit ABCD un tétraèdre. On note I le centre de gravité du triangle BCD, J le milieu du segment [AI] et K le symétrique de A par rapport à I.
Exprimer J et K comme barycentres des points A, B, C, D pondérés par des coefficients que l'on précisera.

3 Soit ABCD un tétraèdre de l'espace $\mathcal{E}$.
On note I le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, – 2).
On note également J le barycentre des points pondérés (C, 1) et (D, – 2).
1°) Déterminer la position de I et J.
Les points I et J peuvent-ils être confondus ?
2°) Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathcal{E}$ tels que l'on ait : $\left\| \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} \right\|$.

4 Soit A et B deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$.
Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathcal{E}$ tels que l'on ait : $\left\| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\| = 2\left\| \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \right\|$.

5 Soit ABCDEFGH un parallélépipède (solide de l'espace dont toutes les faces sont des parallélogrammes).
On note I le centre de gravité du triangle BDE.

Le but de l'exercice est de démontrer que I appartient au segment [AG] et de préciser sa position.



1ère méthode :

1°) Recopier et compléter l'égalité :
Pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = ...$
2°) Ecrire l'égalité précédente pour M = A.
3°) En déduire que I appartient au segment [AG] et préciser sa position sur le segment [AG].

2e méthode :

On munit l'espace du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1°) Donner sans explication les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H dans ce repère.
2°) Calculer les coordonnées du point I.
3°) Démontrer que I appartient au segment [AG] et préciser sa position.

6 Soit A, B, C trois points de l'espace.
On note G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 1), (C, 2).

On désigne par *f* la transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{GM}$.
En déduire la nature de *f*.

Corrigé

1 1°) **Démontrons que les droites (IJ), (KL), (MN) sont concourantes au point G.**

G est l'isobarycentre des points A, B, C, D donc G est le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 1), (C ; 1), (D ; 1).

I est le milieu de [AB] donc I est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 1).
J est le milieu de [CD] donc J est le barycentre des points pondérés (C ; 1) et (D ; 1).

Donc par associativité du barycentre, G est le barycentre des points pondérés (I ; 2) et (J ; 2).
Donc G est le milieu du segment [IJ].

On démontrerait de même que G est le milieu de [KL] et de [MN].

Donc les droites (IJ), (KL), (MN) sont concourantes au point G.

2°) **Démontrons que les droites (AA'), (BB'), (CC'), (DD') sont concourantes en G.**

On note A' est le centre de gravité de BCD.
Donc A' est le barycentre des points pondérés (B ; 1), (C ; 1), (D ; 1).
Donc par associativité du barycentre, G est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (A' ; 3).

Par conséquent, on peut dire que $G \in (AA')$ (on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$).

De même, G est le barycentre :
- des points pondérés (B ; 1) et (B' ; 3) ;
- des points pondérés (C ; 1) et (C' ; 3) ;
- des points pondérés (D ; 1) et (D' ; 3).

On en déduit que (AA'), (BB'), (CC'), (DD') sont concourantes en G.

Démontrons que le tétraèdre A'B'C'D' est l'image du tétraèdre ABCD par une homothétie.

On a $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$

On a $\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB'} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GB}$

On a $\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GC}$

On a $\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{GD'} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{GD'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GD}$.

Donc A', B', C', D' sont les images respectives de A, B, C, D par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{3}$.

On en déduit que A'B'C'D' est l'image de ABCD par $h_{\left(G\,;\,-\frac{1}{3}\right)}$.

2 I est le centre de gravité du triangle BCD donc I est l'isobarycentre des points B, C, D.
Par suite, I est le barycentre des points pondérés (B, 1), (C, 1) et (D, 1).
Or J le milieu du segment [AI] donc J est l'isobarycentre des points A et I.
Par suite, J est le barycentre des points pondérés (A, 3) et (I, 3).
D'après le théorème d'associativité, on en déduit que J est le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, 1), (C, 1) et (D, 1).

K est le symétrique de A par rapport à I donc $\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{KI}$ d'où $\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KI} = \vec{0}$.
Comme $1 - 2 \neq 0$, on en déduit que K est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (I ; –2).
Par homogénéité, on peut aussi dire que K est le barycentre des points pondérés (A ; –3) et (I ; 6).
Or I est l'isobarycentre des points B, C, D donc I est le barycentre des points pondérés (B, 2), (C, 2) et (D, 2).
La propriété d'associativité permet de dire que K est le barycentre des points pondérés (A ; –3), (B, 2), (C, 2) et (D, 2).

3 1°) D'après l'égalité de position, on a : $\overrightarrow{AI} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ} = 2\,\overrightarrow{CD}$.
Le point I est donc le symétrique de A par rapport à B et J est le symétrique de C par rapport à D.

Le point I appartient à la droite (AB) et le point J appartient à la droite (CD).
Or ABCD est un tétraèdre donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.
Par conséquent, leur intersection est vide.
On en déduit que les points I et J ne peuvent pas être confondus.
2°) Bien apprendre la rédaction type pour la recherche d'ensembles de points (démarche en 3 étapes).

1ère étape : réduction des sommes vectorielles

D'après la relation fondamentale pour les barycentres, pour tout point M de l'espace, on a :
$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$.

2e étape : recherche de l'ensemble

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} \right\| \\ &\Leftrightarrow \left\| -\overrightarrow{MI} \right\| = \left\| -\overrightarrow{MJ} \right\| \\ &\Leftrightarrow MI = MJ \end{aligned}$$

3e étape : conclusion (identification de l'ensemble)

Comme les points I et J ne sont pas confondus, on en déduit que l'ensemble *E* est le plan médiateur du segment [IJ].
(Il est important d'avoir dit préalablement que les points I et J ne sont pas confondus pour pouvoir affirmer que l'ensemble cherché est le plan médiateur du segment [IJ].)

4 On note G le barycentre des points pondérés (A ; 3) et (B ; – 1).
D'après la relation fondamentale, pour tout point M de l'espace, on a : $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG}$
Pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$ (relation de Chasles).

…

L'ensemble *E* est la sphère de centre G et de rayon AB.

Rappel de définition :

Soit Ω un point fixé de l'espace et *R* un réel strictement positif fixé. **La sphère de centre Ω et de rayon *R* est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.**

(Tous les points d'une sphère de centre Ω sont situés à la même distance du centre ; cette distance est égale à *R*).

$\boxed{5}$ **1ère méthode**

1°) Pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=3\,\overrightarrow{MI}$.

2°) Avec $M=A$, la relation précédente s'écrit : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=3\,\overrightarrow{AI}$.

3°) On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$.

On en déduit que $3\,\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AG}$ donc $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

2e méthode

On munit l'espace du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1°) A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1), H(0 ; 0 , 1).

2°) $I\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

3°) $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$

On a : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

$\boxed{6}$ 1°) $\overrightarrow{GM'}=-3\overrightarrow{GM}$.

2°) *f* est l'homothétie de centre G et de rapport –3.