Exercices sur la géométrie affine

1 Soit ABCDEFGH un cube de l'espace.
Déterminer $S_{(\text{AFG})} \circ S_{(\text{BCH})}$.

2 Soit ABC un triangle indirect dans le plan orienté.
A l'extérieur de ce triangle, on construit les points I et J tels que les triangles ABI et BCJ soient isocèles rectangles respectivement en I et J.
On note O le milieu de [AC].
Démontrer que le triangle OIJ est isocèle rectangle en O.
Indication : considérer $R_{\left(\text{J}, \frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(\text{I}, \frac{\pi}{2}\right)}$.

3 Soit ABCD un carré direct dans le plan orienté. On note I le centre de ABCD et J le milieu de [CD].
1°) Préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe *s* qui transforme A en I et B en J.
Construire son centre Ω.
2°) Déterminer l'image par *s* de la droite (BC). En déduire l'image du point C par *s*, puis le point K image par *s* du point I.
3°) On pose $h = s \circ s$.
a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation *h*.
b) Démontrer que les points A, Ω et K sont alignés.

4 Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les plans P_1 et P_2 d'équations cartésiennes respectives $x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ et $x\sqrt{3} - y + 1 = 0$.
On se propose de déterminer $f = S_{P_2} \circ S_{P_1}$.
1°) Déterminer $D_1 = P_1 \cap (x\text{O}y)$ et $D_2 = P_2 \cap (x\text{O}y)$.
(On pourra faire une figure dans le plan (*x*O*y*).)
2°) Soit $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs respectivement directeurs de D_1 et D_2.
Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u_1}, \vec{u_2}\right)$ dans le plan (*x*O*y*) (orienté tel que la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ soit directe).
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de *f*.

5 Soit ADEF un carré indirect de côté 1 dans un plan affine euclidien orienté.
On note I le milieu de [AF], B le point de la demi-droite [AF) et C le point tel que ABCD soit un rectangle.
On cherche une similitude directe *s* qui transforme respectivement A, B, C, D en B, C, E, F.
1°) On suppose qu'une telle similitude existe.
a) Quel est son rapport et son angle ?
b) Démontrer en considérant $s \circ s$ que son centre Ω est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).
2°) En utilisant le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AF}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$, démontrer que *s* existe et est unique.

6 Dans l'espace orienté, on considère un carré ABCD de centre O.
On désigne par E le point défini par $\overrightarrow{\text{OA}} \wedge \overrightarrow{\text{OB}} = \overrightarrow{\text{OE}}$.
Soit *f* une isométrie laissant globalement invariant l'ensemble {A, B, C, D, E}.
1°) a) Démontrer que les images par toute isométrie des points A, B, C, D sont coplanaires.
En déduire que l'ensemble {A, B, C, D} est globalement invariant par *f* et démontrer que E est invariant.
b) Démontrer que O est invariant par *f*.
2°) Si *f* est une rotation, quel est son axe ?
En déduire toutes les rotations laissant l'ensemble {A, B, C, D, E} globalement invariant.
3°) Démontrer que, si *f* est une réflexion, son plan contient la droite (OE). En déduire toutes les réflexions laissant l'ensemble {A, B, C, D, E} globalement invariant.

7 Soit ABCD un tétraèdre régulier, G son isobarycentre et H l'isobarycentre du triangle ABD.
On note I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AD], [BC], [AC] et [BD].
1°) a) Démontrer que les droites (IJ) et (KL) se coupent en G.
b) Démontrer que la droite (CG) coupe le plan (ABD) en H.
c) Placer sur une figure les données précédentes.
2°) Soit s_1 la réflexion par rapport au plan (BIC) et s_2 la réflexion par rapport au plan (ALC).
On pose $r = s_2 \circ s_1$.
a) Démontrer que le plan (BIC) est le plan médiateur du segment [AD] ; en déduire les images de A et D par s_1.
Déterminer de même les images de B et D par s_2.
b) Déterminer les images des points A, B, C, D et G par *r*.
c) Démontrer que *r* est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

8 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.
Soit G un ensemble fini d'applications affines de $\mathcal{E}$ tel que (G, o) soit un groupe.
Démontrer qu'il existe un point fixe commun à toutes les applications affines de G.

Indication :
Soit A un point fixé de $\mathcal{E}$.
Considérer l'isobarycentre de l'ensemble $\left\{ f(\text{A}),\ f \in \text{G} \right\}$.

9 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.
Déterminer les applications affines *f* de $\mathcal{E}$ telles que pour toute translation *t* de $\mathcal{E}$ on ait $f \circ t = t \circ f$.

10 Soit O et O' deux points quelconques d'un espace affine $\mathcal{E}$ et *k* et *k*' deux réels quelconques non nuls.
Déterminer $\text{h}_{(\text{O}, k)} \circ \text{h}_{(\text{O}', k')}$.

11 Soit ABC un triangle direct du plan euclidien orienté.
A l'extérieur du triangle, on construit les triangles ABB' et ACC' isocèles rectangles en A.
Soit I le milieu de [BC].
Démontrer que $(\text{AI}) \perp (\text{B'C'})$ et que $\text{AI} = \frac{1}{2}\text{B'C'}$.

Indication :
On pourra considérer la rotation $r = R_{\left(\text{A}, \frac{\pi}{2}\right)}$.

12 Soit ABCD un rectangle du plan euclidien *P*.
Démontrer que l'application $f : P \to \mathbb{R}$, $\text{M} \mapsto \text{MA}^2 - \text{MB}^2 + \text{MC}^2 - \text{MD}^2$ est constante.

13 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3.
Soit O, A, B, C, A', B', C' sept points de $\mathcal{E}$ tels que les familles $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{\text{OA'}}, \overrightarrow{\text{OB'}}, \overrightarrow{\text{OC'}}\right)$ soient des bases orthonormées directes de $\vec{\mathcal{E}}$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AA'}}$, $\overrightarrow{\text{BB'}}$, $\overrightarrow{\text{CC'}}$ sont coplanaires.

14 Soit ABCD un quadrilatère convexe. On note O le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD).
La parallèle à (BC) passant par A coupe (BD) en I ; la parallèle à (AD) passant par B coupe (AC) en J.
Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (IJ) et (CD) sont parallèles.
On note f et g les homothéties de centre O qui transforment respectivement A en C et B en D.
1°) Quelle est l'image de I par f ? par $g \circ f$?
2°) Quelles est l'image de J par g ? par $f \circ g$?
3°) Expliquer pourquoi $f \circ g = g \circ f$; on note h l'homothétie $f \circ g$.
Quelle est l'image de (IJ) par h ? Conclure.

15 Soit A, B, C trois points quelconques non alignés d'un plan affine réel.
Soit α, β, γ trois réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$, $\beta+\gamma\neq 0$, $\alpha+\gamma\neq 0$.
On note A' le barycentre des points pondérés (B,β) et (C,γ), B' le barycentre des points pondérés (A,α) et (C,γ), C' le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β).
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que les droites (AA'), (BB'), (CC') soient parallèles.

16 Soit ABC un triangle d'un plan affine réel.
Soit α, β, γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma+1\neq 0$.
Soit f l'application de P dans P qui à tout point M de P associe le point M', barycentre des points A, B, C, M affectés respectivement des coefficients α, β, γ, 1.
Déterminer la nature de f.

17 On identifie $\mathbb{C}$ aux points du plan complexe.
Soit P un polynôme scindé à coefficients complexes de degré $n \geqslant 2$.
On note z_1, $z_2 \ldots z_n$ les racines de P.
1°) Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
2°) Démontrer que toute racine de P' est barycentre de celles de P à coefficients strictement positifs.
3°) En déduire que si toutes les racines de P sont réelles, alors toutes les racines de P' sont réelles.

18 L'objet de l'exercice est d'étudier des relations entre d'une part des propriétés de configurations planes et d'autre part des égalités dans le groupe des isométries du plan.
1°) Interpréter géométriquement l'égalité $S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D = \mathrm{id}$.
2°) Traduire par une égalité entre isométries la propriété : D est une bissectrice de Δ_1 et de Δ_2.
3°) Démontrer que $S_D \circ S_A = S_A \circ S_D$ si et seulement si $A \in D$.
4°) Démontrer que D_1, D_2, D_3 sont concourantes, si et seulement si $\left(S_{D_1} \circ S_{D_2} \circ S_{D_1}\right)^2 = \mathrm{id}$.

19 On considère dans l'espace quatre points A, B, C, D tels que : AC = AB = BC = BD = AD = a (a réel strictement positif donné).
1°) a) Soit I le milieu du segment [AB].
Démontrer que les droites (IC) et (ID) sont perpendiculaires à la droite (AB).
b) Montrer que IC = ID, exprimer cette longueur en fonction de a.
2°) Soit S_1 la symétrie orthogonale par rapport au plan (ABC) et S_2 la symétrie orthogonale par rapport au plan (ABD).
a) Quelle est la nature de la transformation $R = S_1 \circ S_2$?
b) Déterminer en fonction de a la longueur x = CD pour que R soit une rotation d'angle π.

20 On se propose de déterminer la section d'un cube par le plan médiateur d'une de ses diagonales et d'étudier l'effet sur cette section de transformations laissant le cube invariant.
On considère un cube ABCDEFGH de centre O. Soit M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 les milieux respectifs des côtés [AB], [BF], [FG], [GH], [HD] et [DA].

1°) Démontrer que les points M_i appartiennent au plan médiateur Π de [CE]. Ce plan coupe le cube suivant l'hexagone $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$.
Placer cet hexagone sur une figure représentant le cube.
2°) Soit σ la symétrie centrale par rapport à O. Montrer que le plan Π est invariant par σ. Déterminer les images des points M_i par σ.
3°) a) Soit s la réflexion transformant A en F. Déterminer les images par s des sommets du cube.
b) Soit de même s' la réflexion transformant A en H. Déterminer les images par s' des sommets du cube.
c) Soit $r = s' \circ s$. Prouver que r est une rotation d'axe (CE), et que le plan Π est invariant par r. Déterminer les images par r des sommets du cube et des points M_i.
Démontrer que $r \circ r \circ r$ est l'identité.
d) Soit ρ la rotation dans le plan Π déterminée par r. On oriente le plan Π et on note θ une mesure de l'angle de ρ telle que $0<\theta<2\pi$.
Déterminer les valeurs possibles de θ. En déduire que $M_1M_3M_5$ et $M_2M_4M_6$ sont des triangles équilatéraux de centre O.
4°) À partir de 2° et 3°, prouver que $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ est un hexagone régulier de centre O.

21 Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites distinctes de l'espace. On note R_1 et R_2 les demi-tours d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2.
Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur Δ_1 et Δ_2 pour que $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
1°) On suppose que Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en un point noté O et sont orthogonales. On note Δ la droite orthogonale en O du plan P contenant Δ_1 et Δ_2. On note P_1 et P_2 les plans passant par Δ et contenant respectivement Δ_1 et Δ_2.
Faire une figure.
a) Déterminer $S_P \circ S_{P_1}$ et $S_{P_2} \circ S_P$.
En déduire la nature de $R_2 \circ R_1$.
b) Prouver que $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
2°) Réciproquement, on suppose que $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
Soit A un point de Δ_1 n'appartenant pas à Δ_2 et B l'image de A par R_2.
Démontrer que la droite (AB) et la droite Δ_2 sont sécantes et orthogonales.
En utilisant la relation $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, démontrer que B est invariant par R_1.
En déduire que Δ_1 et Δ_2 sont sécantes et orthogonales.

22 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Déterminer la nature de l'application f qui à tout point M(x ; y ; z) associe le point M'(x' ; y' ; z') avec $x'=y+1$, $y'=z-2$, $z'=x+3$.

$\boxed{23}$ Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M(x ; y) associe le point $M'\left(x' ; y'\right)$ avec $x' = y+1$ et $y' = x+1$.

1°) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2°) Démontrer que f o f est une translation. On pose $f \circ f = t_{2\vec{u}}$.

3°) Démontrer que $t_{-\vec{u}} \circ f$ est une réflexion dont on précisera l'axe Δ ; en déduire que $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$.

$\boxed{24}$ Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point $M\left(x ; y\right)$ associe le point $M'\left(x' ; y'\right)$ avec $x' = 2y-1$ et $y' = 2x+1$.

1°) Démontrer que f est une application affine bijective et préciser f^{-1}.

2°) Démontrer que f admet un unique point invariant I.

3°) Démontrer que f o f est une homothétie.

4°) On pose $h = h_{(I, 2)}$ et $g = h^{-1} \circ f$.

Démontrer que g est une réflexion d'axe Δ ; en déduire que l'on a : $f = h \circ S_\Delta$.

5°) Déterminer une équation de l'image par f de la droite D d'équation $2x + y - 1 = 0$.

$\boxed{25}$ Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point $M\left(x ; y\right)$ associe le point $M'\left(x' ; y'\right)$ avec $x' = 2y-1$ et $y' = 2x-1$.

1°) Démontrer que f est une application affine bijective et préciser f^{-1}.

2°) Démontrer que f admet un unique point invariant I.

3°) Démontrer que f o f est une homothétie.

4°) On pose $h = h_{(I, 2)}$ et $g = h^{-1} \circ f$.

Démontrer que g est une réflexion d'axe Δ ; en déduire que l'on a : $f = h \circ S_\Delta$.

5°) Déterminer une équation de l'image par f de la droite D d'équation $2x + y - 1 = 0$.

Enoncé à revoir : la fin de marche pas.

$\boxed{26}$ **L'inégalité de Ptolémée**

On se propose de démontrer que si A, B, C, D sont quatre point du plan alors :
$AC \times BD \leq AB \times CD + AD \times BC$ (1).

On oriente le plan.

1°) Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme C en D.
On note E l'image du point B par S.
Démontrer que l'on a : $AD \times BC = AC \times ED$ (2).
2°) Soit S' la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C.
a) Démontrer que S' transforme E en D.
b) En déduire que $AB \times CD = AC \times BE$ (3).
3°) En additionnant (2) et (3) membre à membre, en déduire l'inégalité (1).
Que se passe-t-il le point E appartient au segment [BD] ?

$\boxed{27}$ Déterminer les applications affines du plan dans lui-même qui conservent l'hyperbole d'équation $xy = 1$.

$\boxed{28}$ Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC direct.

On construit à l'extérieur de ce triangle trois carrés de côtés respectifs CA, AB, et BC. On note I, J, K leurs centres respectifs.

On veut démontrer que les segments [IB] et [JK] sont orthogonaux et ont la même longueur.
On considère la similitude directe S_1 de centre C qui transforme I en A et la similitude S_2 de centre B qui transforme A en J.
1°) Donner les rapports et les angles de S_1 et S_2. Quelle est la nature de la transformation S_2 o S_1?
2°) Préciser les images de I et de B par S_2 o S_1.
3°) Conclure.

$\boxed{29}$ Soit ABC un triangle du plan. Soit x, y, z trois réels tels que : $x + y + z \neq 0$, $x + y \neq 0$, $y + z \neq 0$ et $z + x \neq 0$.
On note C' le barycentre des points pondérés (A, x) et (B, y), A' le barycentre des points pondérés (B, y) et (C, z), B' le barycentre des points pondérés (C, z) et (A, x), G le barycentre des points pondérés (A, x), (B, y) et (C, z).
Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes au point G.

$\boxed{30}$ Dans le plan euclidien orienté, on considère un triangle direct ABC. On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés BCFG, ACDE et ABHI, de centres respectifs O_1, O_2 et O_3.
1°) Soit s_1 la similitude directe telle que $s_1(C) = D$ et $s_1(O_2) = E$.
Déterminer ses éléments caractéristiques et en déduire $s_1(O_3)$.

2°) Soit s_2 la similitude directe de centre C, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Déterminer $s_2(D)$ et $s_2(B)$.
3°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation s_2 o s_1.
En déduire que la droite (CO_3) est perpendiculaire à la droite (O_2O_1).
4°) On admet que des démonstrations similaires permettent d'établir que (AO_1) est perpendiculaire à (O_2O_3) et que (BO_2) est perpendiculaire à (O_1O_3).
Démontrer alors que les trois droites (AO_1), (BO_2) et (CO_3) sont concourantes en un point P.

Ce point est appelé point de Vecten du triangle.

$\boxed{31}$ Dans le plan orienté P, on donne un triangle ABC direct dont les angles sont tous strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. On construit extérieurement à ce triangle, les triangles équilatéraux A'CB, B'AC, C'BA.

1°) Utiliser des rotations de centres A, B, C pour démontrer que : $AA' = BB' = CC'$ et déterminer les angles $\left(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}\right)$, $\left(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CC'}\right)$, $\left(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{AA'}\right)$.

2°) Soit M le point d'intersection des droites (BB') et (CC').
Démontrer que M appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC', ACB', BCA', puis que M appartient à la droite (AA').
3°) Soit D le point de la demi-droite d'origine M, contenant B, extérieur à [MB], tel que $BD = MC$.
Démontrer qu'il existe une rotation r telle que $r\left(C\right) = B$ et $r\left(M\right) = D$.
Quel est son centre ? son angle ?
Démontrer que $MA + MB + MC = AA'$.
4°) Pour tout point M du plan P, on pose $f\left(N\right) = NA + NB + NC$.
Démontrer que pour tout point N de P, on a : $f\left(N\right) \geq AA'$.
Qu'en déduit-on ?
(On pourra utiliser le point N', image de N dans la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$).
5°) On note G, I, J, K les centres gravités respectifs des triangles ABC, A'BC, B'AC, C'AB.
Démontrer que IJK est un triangle équilatéral de centre de gravité G.

Remarque : le point M s'appelle le point de Torricelli du triangle ABC.

$\boxed{32}$ Soit ABC un triangle équilatéral. Soit M un point de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ de son cercle circonscrit. On note P le point du segment [AM] tel que : MB = MP.
1°) Déterminer la nature du triangle BMP.
2°) En utilisant la rotation de centre B qui transforme A en C, démontrer que : MA = MB + MC.

Questions de cours

$\boxed{1}$ Définition d'une application affine, d'une isométrie affine.

$\boxed{2}$ Définition d'un sous-espace affine.

$\boxed{3}$ Déplacements et antidéplacement du plan.

$\boxed{4}$ Déplacements de l'espace (en particulier, vissages).

$\boxed{5}$ Conservation du barycentre par une application affine.

$\boxed{6}$ Barycentre (définition).

$\boxed{7}$ Direction d'un sous-espace affine. Notions de parallélisme.

$\boxed{8}$ Applications affines (définitions et propriétés) ; partie linéaire (unicité).
Deux applications affines qui ont la même partie linéaire sont-elles égales ?

$\boxed{9}$ Partie linéaire d'une application affine (définition, composition).

$\boxed{10}$ Translations (caractérisation à l'aide de leurs parties linéaires).

$\boxed{11}$ Théorème de l'hyperplan médiateur.

$\boxed{12}$ Une isométrie est affine et sa partie linéaire est orthogonale.

$\boxed{13}$ On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E.
Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces affines de directions respectives A et B.
Démontrer que si $A \cap B = \{0\}$, alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est soit vide, soit réduit à un singleton.
Démontrer que si $A + B = E$, alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \varnothing$.
Que peut-on dire de l'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ lorsque A et B sont supplémentaires dans E ?

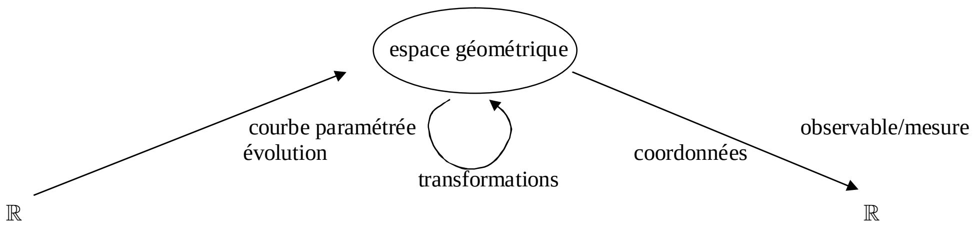
$\boxed{14}$ Image d'un sous-espace affine par une application affine.

$\boxed{15}$ Associativité de la barycentration (énoncé de la propriété et démonstration)

$\boxed{16}$ Application affine bijective (partie linéaire). Groupe des applications affines bijectives d'un espace affine dans lui-même. Sous-groupe des homothéties-translations.

$\boxed{17}$ Expression analytique d'une application affine dans des repères.

Schéma



3 types de fonctions

Courbe paramétrée : une partie de ℝ $\longrightarrow$ une partie d'un espace géométrique

Transformation : une partie d'un espace géométrique $\longrightarrow$ une partie d'un espace géométrique

Coordonnées : une partie d'un espace géométrique $\longrightarrow$ une partie d'un espace géométrique
Fonction d'état

Réponses

$\boxed{1}$ On note O le centre de la face ABFE et O' celui de la face CDHG.

$S_{(\mathrm{AFG})} \circ S_{(\mathrm{BCH})} = S_{\mathrm{O}}$

$\boxed{2}$ $R_{\left(\mathrm{J}, \frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(\mathrm{I}, \frac{\pi}{2}\right)} = S_{\mathrm{O}}$

A pour image C par S_{O} donc O est le milieu de [AC].

$\boxed{3}$ 1°) $s = S_{\left(\Omega, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$ 2°) 3°) On sait que $s(\mathrm{B}) = \mathrm{J}$.

On sait que l'image de (BC) est la droite qui passe par J et qui est orthogonale à (BC) (car l'angle de la similitude est égal à $\frac{\pi}{2}$).
L'image de (BC) par s est la droite (CD).

$s(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$; K milieu de [ID].
4°) a) $\mathrm{h} = h_{\left(\Omega, -\frac{1}{4}\right)}$
b) $h(\mathrm{A}) = \mathrm{K}$
Les points A, Ω, K sont alignés.

Autre méthode : utiliser les nombres complexes

On munit le plan du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.
$z' = az + b$

$a = \frac{1}{2}\mathrm{i}$ $\quad b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ $\quad \Omega\left(\frac{1+3\mathrm{i}}{5}\right)$

$\boxed{4}$ 2°) $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = \frac{\pi}{3}$ (2π) ; $f = R_{\left(\Delta, \frac{\pi}{3}\right)}$ où $\Delta = \mathrm{A} + \mathbb{R}\vec{k}$ avec A(0, 1, 0).

$\boxed{10}$ Deux cas : $k \times k' = 1$ ou $kk' \neq 1$.

On peut aussi raisonner en coordonnées ou en complexes.

$\boxed{11}$ On considère $R_{\left(\mathrm{A}, \frac{\pi}{2}\right)}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}''$.

On note I' le milieu de [B''C'].
On a alors $r(\mathrm{I}) = \mathrm{I}'$.

$\boxed{16}$ Nature de *f*.

1er cas : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$$\text{M'} : \underbrace{(\text{A}, \alpha), (\text{B}, \beta), (\text{C}, \gamma)}_{\substack{(\text{G}, \alpha+\beta+\gamma) \\ \alpha+\beta+\gamma\neq 0}}, (\text{M}, 1)$$

$$\overrightarrow{\text{GM}'}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\ \overrightarrow{\text{GM}}$$

2^{e} cas : $\alpha+\beta+\gamma=0$

$$\underbrace{\alpha\overrightarrow{\text{MA}}+\beta\overrightarrow{\text{MB}}+\gamma\overrightarrow{\text{MC}}}_{\vec{u}\text{ vecteur constant}}+\overrightarrow{\text{MM}'}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{MM}'}=-\vec{u}$$

Autre méthode :

Travailler en coordonnées

$\boxed{22}$ Vissage

On observe assez vite que f est la composée d'une rotation et d'une translation.

L'axe de la rotation admet le vecteur $\vec{u}\left(1;1;1\right)$ pour vecteur directeur.

L'axe du vissage est l'ensemble des points M(x, y, z) tels que $\overrightarrow{\text{MM}'}$ soit colinéaire à $\vec{u}$.

$$\begin{cases} x'-x=\lambda \\ y'-y=\lambda \\ z'-z=\lambda \end{cases}$$

$\boxed{24}$ 1°) $x=\dfrac{y'+1}{2}$ et $y=\dfrac{x'+1}{2}$.

2°) f admet un seul point invariant : $\text{I}\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

3°) $f\circ f=\text{h}_{(1,4)}$.

4°) $\Delta :\ y=x+1$.

5°) D' : $x'+2y'+1=0$

$\boxed{27}$ Applications affines du plan dans lui-même qui conservent l'hyperbole d'équation $xy=1$.

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases} \text{ si } f\left(0\right)=0$$

$$acx^4+\left(ad+bc\right)x^2+bd=x^2$$

$$\begin{cases} x'=\lambda y \\ y'=\dfrac{1}{\lambda}x \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=\lambda x \\ y'=\dfrac{1}{\lambda}y \end{cases}$$

$\boxed{30}$ Intérêt de l'exercice : avec des composées de similitudes directes, montrer l'existence d'un point remarquable du triangle.

1°) s_1 a pour rapport $k_1=\dfrac{\text{DE}}{\text{CO}_2}=\sqrt{2}$, pour angle $\theta_1=\left(\overrightarrow{\text{CO}_2},\overrightarrow{\text{DE}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ (2π) et pour centre A,

car $\text{AD}=\text{AC}\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré) et $\left(\overrightarrow{\text{AC}},\overrightarrow{\text{AD}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ (2π)

D'autre part, AO_3B est direct, rectangle et isocèle en O_3 donc $\text{AB}=\sqrt{2}\ \text{AO}_3$ et $\left(\overrightarrow{\text{AO}_3},\overrightarrow{\text{AB}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ (2p).

Alors, $s_1\left(\text{O}_3\right)=\text{B}$.

2°) De même, $s_2\left(\text{D}\right)=\text{O}_2$ et $s_2\left(\text{B}\right)=\text{O}_1$ car les triangles CDO_2 et CBO_1 sont directs, rectangles et isocèles respectivement en O_2 et O_1.

3°) $s_2 \circ s_1$ est une similitude directe (composée de 2 similitudes directes).

Son rapport est $k_1k_2=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$ donc c'est une isométrie directe (un déplacement).

Son angle est $\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$, $s_2 \circ s_1$ est donc une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

$s_2 \circ s_1$ (C) = s_2 (D) = O_2 et $s_2 \circ s_1$ (O3) = s_2 (B) = O_1 ; donc la droite (O_2O_1) est l'image de (CO_3) dans une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Ces deux droites sont bien perpendiculaires.

4°) Si l'on considère le triangle $\text{O}_1\text{O}_2\text{O}_3$, les 3 droites ($\text{AO}_1$), ($\text{BO}_2$) et ($\text{CO}_3$) sont les 3 hauteurs de ce triangle (elles passent par un sommet et sont perpendiculaires au côté opposé).

Elles sont concourantes en un point P qui est l'orthocentre du triangle $\text{O}_1\text{O}_2\text{O}_3$.