TS Exercices sur la géométrie dans l'espace (niveau 2)

Dans tous les exercices, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1 QCM (une seule réponse exacte pour chaque question). Justifier les réponses.

On donne le point S(1 ; – 2 ; 0) et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + y - 3z + 4 = 0$.

1°) Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point S et orthogonale au plan $\mathcal{P}$ est :

a. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=-3 \end{cases} \ (t\in\mathbb{R})$ b. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \end{cases} \ (t\in\mathbb{R})$ c. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=3t \end{cases} \ (t\in\mathbb{R})$ d. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases} \ (t\in\mathbb{R})$

2°) Les coordonnées du point d'intersection H de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ sont :

a. (– 4 ; 0 ; 0) b. $\left(\frac{6}{5} ; -\frac{9}{5} ; -\frac{3}{5}\right)$ c. $\left(\frac{7}{9} ; -\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ d. $\left(\frac{8}{11} ; -\frac{25}{11} ; \frac{9}{11}\right)$

3°) La distance du point S au plan $\mathcal{P}$ est égale à :

a. $\frac{\sqrt{11}}{3}$ b. $\frac{3}{\sqrt{11}}$ c. $\frac{9}{\sqrt{11}}$ d. $\frac{9}{11}$

4°) On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre S et de rayon 3.
L'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est égale

a. au singleton* constitué du point I(1 ; – 5 ; 0) b. au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$

c. au cercle de centre S et de rayon $r = 2$ d. au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$

* Rappel : un singleton est un ensemble constitué d'un seul élément.

2 On considère les points A(3 ; – 2 ; 2), B(6 ; 1 ; 5) et C(6 ; – 2 ; – 1).

Partie A

1°) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2°) Soit P le plan orthogonal à (AB) passant par A et P' le plan orthogonal à (AC) passant par A.
Déterminer une équation cartésienne de P et P' (détailler la rédaction uniquement pour P).
Démontrer que P et P' sont sécants.
3°) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ d'intersection de P et P'.

Partie B

1°) Soit D le point de coordonnées (0 ; 4 ; – 1).
Démontrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2°) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
3°) Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{BDC}}$.
4°) a) Calculer l'aire du triangle BDC.
b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

3 QCM

On considère les points A(3 ; 1 ; 3) et B(– 6 ; 2 ; 1) ainsi que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y + 2z = 5$.

1°) L'ensemble F des points M de l'espace tels que $\left\| 4\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} \right\| = 2$ est égal à :

a : un plan de l'espace b : une sphère c : l'ensemble vide

2°) Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$, sont :

a : $\left(\frac{11}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ b : $\left(\frac{8}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{7}{3}\right)$ c : $\left(\frac{7}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{5}{3}\right)$

3°) La sphère S de centre B et de rayon 1

a : coupe le plan $\mathcal{P}$ suivant un cercle b : est tangente au plan $\mathcal{P}$ c : ne coupe pas le plan $\mathcal{P}$

4°) On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; 2 ; – 1) et la droite $\mathcal{D}$ '

admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ ' sont

a : coplanaires et parallèles b : coplanaires et sécantes c : non coplanaires

5°) L'ensemble des points M équidistants de A et B est

a : la droite admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=-\frac{3}{2}-t \\ y=\frac{3}{2}-7t \\ z=2+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

b : le plan d'équation cartésienne $9x - y + 2z + 11 = 0$
c : le plan d'équation cartésienne $x + 7y - z - 7 = 0$

4 On donne le point A(5 ; 3 ; 0) ainsi que le plan P d'équation cartésienne $2x - 2y + z - 1 = 0$.

1°) Caractériser par une inéquation le demi-espace fermé $\mathcal{E}_1$ de frontière P qui ne contient pas le point O.
2°) a) Calculer d(A, P).
b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre A et tangente à P.
c) Démontrer que S est contenue dans $\mathcal{E}_1$.
3°) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par A et orthogonale à P.
b) En déduire les coordonnées du point H de contact de S et P.

5 On considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(1 ; 1 ; 4) et C(– 1 ; 1 ; 1).

1°) a) Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
b) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ (3 ; 4 ; – 2) est un vecteur normal au plan (ABC) ; en déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2°) Soit P_1 et P_2 les plans d'équations cartésiennes respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
a) Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$ dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
b) Démontrer que $\mathcal{D}$ // (ABC).

6 On considère les plans P, Q, R précisés par une équation cartésienne
$P : 2x - y + 5 = 0$, $Q : 3x + y - z = 0$, $R : -5x + 5y - z = 0$.

ainsi que la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

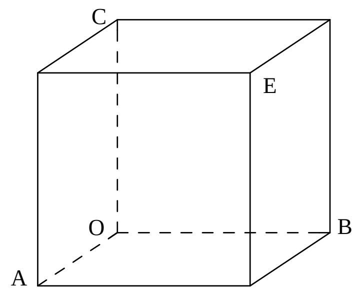
1°) Démontrer que P et Q sont sécants.
On pose $P \cap Q = \boldsymbol{D}$.
Déterminer un système d'équations paramétriques de $\boldsymbol{D}$.
2°) La droite $\boldsymbol{D}$ est-elle parallèle au plan R ?
3°) Les droites $\boldsymbol{D}$ et Δ sont-elles coplanaires ?

7 **QCM (justifier les réponses)**

On note $\boldsymbol{D}$ la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $\boldsymbol{P}$ le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z - 1 = 0$.
On justifiera chaque fois la réponse choisie (il y a à chaque fois une seule réponse exacte).

	Affirmation A	**Affirmation B**	**Affirmation C**
1°)	Le point $M(-1\,;3\,;2)$ appartient à la droite $\boldsymbol{D}$.	Le point $N(2\,;\,-3\,;\,-1)$ appartient à la droite $\boldsymbol{D}$.	Le point $R(3\,;1\,;-4)$ appartient à la droite $\boldsymbol{D}$.
2°)	Le vecteur $\vec{u}(3\,;4\,;-2)$ est un vecteur directeur de $\boldsymbol{D}$.	Le vecteur $\vec{v}(-2\,;1\,;1)$ est un vecteur directeur de $\boldsymbol{D}$.	Le vecteur $\vec{w}(3\,;1\,;-4)$ est un vecteur directeur de $\boldsymbol{D}$.
3°)	$\boldsymbol{D}$ est incluse dans le plan $\boldsymbol{P}$.	$\boldsymbol{D}$ est strictement parallèle au plan $\boldsymbol{P}$.	$\boldsymbol{D}$ est sécante à $\boldsymbol{P}$.
4°)	Le point $G(1\,;3\,;\,-2)$ appartient au plan $\boldsymbol{P}$.	Le point G(1 ; 3 ; 2) appartient au plan $\boldsymbol{P}$.	Le point $G(1\,;3\,;-1)$ appartient au plan $\boldsymbol{P}$.
5°)	Le plan Q_1 d'équation cartésienne $x + 2y - 3z + 1 = 0$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{P}$.	Le plan Q_2 d'équation cartésienne $4x - 5y - 2z + 3 = 0$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{P}$.	Le plan Q_3 d'équation cartésienne $-3x + 2y - z - 1 = 0$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{P}$.
6°)	La distance du point $T(-1\,;\,-3\,;2)$ au plan $\boldsymbol{P}$ est égale à $\sqrt{14}$.	La distance du point $T(-1\,;\,-3\,;2)$ au plan $\boldsymbol{P}$ est égale à 14.	La distance du point $T(-1\,;\,-3\,;2)$ au plan $\boldsymbol{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

8 La figure ci-dessous représente un cube d'arête 1 dont on a nommé certains sommets.
Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse au tétraèdre OABC.
On note I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC et J celui de la hauteur issue de B.



1°) a) Décrire les faces du tétraèdre OABC et en déduire la position du point I sur [AB] et celle du point J sur [AC].
b) Sur la figure donnée, construire précisément les points I et J, puis placer le point d'intersection K des droites (CI) et (BJ).
c) Que représente le point K pour le triangle ABC ?

2°) On se place dans le repère de l'espace $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$.
a) Expliquer pourquoi ce repère est orthonormé et donner sans explication les coordonnées des points O, A, B, C, E.
b) Calculer les coordonnées de K et en déduire que le point K appartient à la diagonale [OE] (préciser la position de K sur [OE]).
c) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{OK}$ est normal au plan (ABC) et en déduire la distance du point O au plan (ABC).

3°) Soit D le symétrique de K par rapport à O.
a) Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont la même longueur).
b) Soit Ω le milieu du segment [OK].
Démontrer que le point Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Corrigé

1 S(1 ; – 2 ; 0)
P : $x + y - 3z + 4 = 0$

1°) Un système d'équations paramétriques de D s'écrit $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

On peut poser $t = t' + 1$ et on obtient le résultat de la **réponse d**.

Version plus détaillée :

$\vec{u}(1 ; 1 ; -3)$ est un vecteur normal à P donc c'est un vecteur directeur de D.

Donc un système d'équations paramétriques de D s'écrit $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

On pose : $\lambda = t + 1$ $(t \in \mathbb{R})$.

Donc un système d'équations paramétriques de D s'écrit $\begin{cases} x = 1 + t + 1 \\ y = -2 + t + 1 \\ z = -3(t + 1) \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

soit $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Donc la bonne réponse est la réponse d.

Autre méthode :

Le vecteur $\vec{u}(1 ; 1 ; -3)$ est un vecteur normal à P donc c'est un vecteur directeur de la droite D.

Cela nous permet d'exclure (d'éliminer) les réponses a et c.
On regarde ensuite si S appartient aux droites définies par les systèmes d'équations paramétriques proposées dans les réponses b ou d.

Ou

Le vecteur $\vec{u}(1 ; 1 ; -3)$ est un vecteur normal à P donc c'est un vecteur directeur de la droite D.
Cela nous permet d'éliminer les réponses a et c.
Il ne reste plus que les réponses b et d.
On regarde parmi les deux réponses, celle à laquelle le point S appartient.
Donc la bonne réponse est la réponse d.

2°) On utilise le système d'équations paramétriques de la droite D déterminé à la question précédente et l'équation cartésienne de P.
On remplace x, y, z dans l'équation cartésienne du plan P par leurs expressions.
On trouve alors la valeur de t.
On remplace cette valeur de t dans le système d'équations paramétrique de D.
On trouve ainsi les coordonnées de H.
On obtient la **réponse d**.

Version détaillée :

Le paramètre t du point H d'intersection de D et P est solution de l'équation
$-1 + t - 2 + t - 3(-3t) + 4 = 0$ (1) [en utilisant le système d'équation paramétriques de la droite déterminé précédemment qui n'est pas celui de la réponse proposée]

(1) $\Leftrightarrow -1 + 2t + 9t + 4 = 0$
$\Leftrightarrow 11t + 3 = 0$
$\Leftrightarrow t = -\dfrac{3}{11}$

Donc H $\left| \begin{array}{l} x_{\text{H}} = 1 - \dfrac{3}{11} = \dfrac{8}{11} \\ y_{\text{H}} = -2 - \dfrac{3}{11} = -\dfrac{25}{11} \\ z_{\text{H}} = \dfrac{9}{11} \end{array} \right.$.

3°) On applique la formule qui donne la distance d'un point à un plan.
On obtient la réponse b.

Version détaillée :

$$\text{d}(\text{S}, P) = \frac{|1 - 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

La bonne réponse est la **réponse b**.

4°) On applique la règle sur l'intersection d'une sphère et d'un plan.

Soit A un point et P un plan de l'espace.
On note S la sphère de centre A et de rayon R et d la distance du point A au plan P (d = d(A, P), observer que les deux d n'ont pas la même signification).

Si $d < R$, alors l'intersection de la sphère S et du plan P est le cercle de centre H, projeté orthogonal de A sur P, et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ (il s'agit d'une simple application du théorème de Pythagore, faire une figure pour le visualiser).

Remarque :

Si $d < R$, alors l'intersection de la boule de centre A et de rayon R et du plan *P* est le disque de centre H, projeté orthogonal de A sur *P*, et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Rappel : un singleton est un ensemble constitué d'un seul élément.

Il faut d'abord remarquer que H est le projeté orthogonal de S sur ***P***.
On obtient la **réponse b**.

Version détaillée :

$\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$: cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 - d^2} \\ &= \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2} \\ &= \sqrt{9 - \frac{9}{11}} \\ &= \sqrt{\frac{90}{11}} \\ &= 3\sqrt{\frac{10}{11}} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ A(3 ; – 2 ; 2) B(6 ; 1 ; 5) C(6 ; – 2 ; – 1)

Partie A :

1°) **Démontrons que ABC est rectangle.**

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 3 \times 3 + 0 \times 3 + 3 \times (-3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
D'où (AB) $\perp$ (AC).
On en conclut que ABC est rectangle en A.

2°) *P* : plan orthogonal à (AB) passant par A ;

P' : plan orthogonal à (AC) passant par A

• **Déterminons une équation cartésienne des plans *P* et *P*'.**

On sait que *P* est orthogonal à (AB) donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à *P*.

P admet donc une équation cartésienne de la forme $3x + 3y + 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Or A $\in$ *P* donc $3 \times 3 + 3 \times (-2) + 3 \times 2 + d = 0$
d'où $d = -9$.

Donc le plan *P* a équation cartésienne $3x + 3y + 3z - 9 = 0$ soit (en simplifiant par 3) : $x + y + z - 3 = 0$.

De même, le plan *P*' admet pour équation cartésienne $x - z - 1 = 0$.

• **Démontrons que les plans *P* et *P*' sont sécants.**

Les plans *P* et *P*' passent tous les deux par le point A. De plus, leurs équations cartésiennes trouvées précédemment permettent de voir qu'ils ne sont pas confondus.

Ils sont donc sécants suivant une droite qui passe par A.

3°) $P \cap P' = \Delta$

Déterminons un système d'équations paramétriques de Δ.

Soit M(x ; y ; z) un point quelconque de l'espace.

$$\text{M} \in P \cap P' \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Posons $z = t$.

$$\text{M} \in P \cap P' \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + t - 3 = 0 \\ x = t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + 1 + y + t - 3 = 0 \\ x = t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2t - 2 \\ x = t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 2 \\ z = t \end{cases}$$

Δ admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t-2 \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Autre rédaction possible :

On considère le système formé par les équations cartésiennes de P et P' :

(I) $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z+3 \\ x=z+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (z+1)+y=-z+3 \\ x=z+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2z+2 \\ x=z+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z+1 \\ y=-2z+2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z+1 \\ y=-2z+2 \\ z=z \end{cases}$

Un système d'équations paramétriques de Δ s'écrit $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t-2 \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Partie B :

1°) **Démontrons que (AD) $\perp$ (ABC).**

Point-méthode :

On démontre que la droite (AD) est orthogonale (ici perpendiculaire en fait car les droites sont sécantes) à la droite (AB) et à la droite (AC). Pour cela, on utilise le produit scalaire.
On utilise la propriété :
« Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan ».

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}\right.$ $\quad \overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{matrix}\right.$ $\quad \overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} = (-3) \times 3 + 6 \times 3 - 3 \times 3$
$= 0$

Donc (AD) $\perp$ (AB)

$\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AC} = (-3) \times 3 + 6 \times 0 - 3 \times (-3)$
$= 0$

Donc (AD) $\perp$ (AC)

(AD) est orthogonale à (AB) et à (AC).
Donc (AD) est orthogonale à (ABC).

2°) **Calculons le volume du tétraèdre ABCD.**

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \dfrac{\boldsymbol{B} \times h}{3}$ où $\boldsymbol{B}$ désigne l'aire de la base et h la hauteur correspondant à cette base (c'est la formule $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3}$).
On prend pour base ABC (triangle rectangle en A).
La droite (AD) est orthogonale au plan (ABC) donc (AD) est la hauteur issue de A dans le tétraèdre ABCD.

(On applique la formule avec $\boldsymbol{B}$ = aire de la base ABC ; h = hauteur AD du tétraèdre)

$\text{AB} = \sqrt{3^2+3^2+3^2}$
$= \sqrt{27}$
$= 3\sqrt{3}$

$\text{AC} = \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2}$
$= \sqrt{18}$
$= 3\sqrt{2}$

$\text{AD} = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2}$
$= \sqrt{54}$
$= 3\sqrt{6}$

On calcule $\mathcal{A}_{\text{ABC}}$.

$\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2}$
$= \dfrac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$ u.a.

La hauteur du tétraèdre ABCD est égale à AD.

$$V_{ABCD} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \times AD}{3}$$
$$= \frac{9\sqrt{6} \times 3\sqrt{6}}{3 \times 2}$$
$$= 27 \text{ u. v.}$$

3°) Calculons $\cos \widehat{BDC}$.

On a : $\cos \widehat{BDC} = \dfrac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{DB \times DC}$.

On calcule à part $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{DB}\left|\begin{matrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{matrix}\right. \qquad \overrightarrow{DC}\left|\begin{matrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

$$DB = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{81}$$
$$= 9$$

$$DC = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 0}$$
$$= \sqrt{72}$$
$$= 6\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = -6 \times (-6) + 3 \times 6 + (-6) \times 0$$
$$= 36 + 18$$
$$= 54$$

$$\cos \widehat{BDC} = \frac{54}{9 \times 6\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or $0 \leq \widehat{BDC} \leq \pi$ (important à dire) donc : $\widehat{BDC} = \dfrac{\pi}{4}$ rad.

4°) a) **Calculons l'aire du triangle BDC.**

On utilise la formule qui permet de calculer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de deux côtés et de l'angle qu'ils forment.

$$\mathcal{A}_{BDC} = \frac{1}{2} \times DB \times DC \times \sin \widehat{BDC}$$
$$= \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \sin \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= 27 \text{ u.a.}$$

$$\mathcal{A}_{BDC} = \frac{1}{2} \times DB \times DC \times \sin \widehat{BDC}$$
$$= 27\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 27 \text{ u.a.}$$

b) **Calculons d(A, (BDC)).**

On calcule le volume de ABCD en prenant cette fois le triangle BCD pour base.

$$V_{ABCD} = \frac{\mathcal{A}_{BDC} \times d\big(A,\ (BDC)\big)}{3}$$

Donc $27 = \dfrac{27 \times d\big(A,\ (BDC)\big)}{3}$

D'où d(A, (BDC)) = 3.

$\boxed{3}$ 1°) **b** (pour la recherche de l'ensemble *F*, ne pas utiliser les coordonnées de A et de B ; en revanche utiliser un barycentre)

1ère étape : réduction de la somme vectorielle

Soit G le barycentre des points pondérés (A ; 4) et (B ; –1).

D'après la relation fondamentale pour les barycentres, pour tout point M de l'espace, on a : $4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$.

2e étape : recherche de l'ensemble

$$M \in F \Leftrightarrow \left\| 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\| = 2$$
$$\Leftrightarrow \left\| 3\overrightarrow{MG} \right\| = 2$$
$$\Leftrightarrow |3| \times \left\| \overrightarrow{MG} \right\| = 2$$
$$\Leftrightarrow 3 \times MG = 2$$
$$\Leftrightarrow MG = \frac{2}{3}$$

3[e] étape : conclusion (identification de l'ensemble)

L'ensemble F est la sphère de centre G et de rayon $r=\frac{2}{3}$.

2°) **c**

Le projeté orthogonal du point H sur le plan P est le point d'intersection de la droite Δ orthogonale à P passant par A.
On détermine un système d'équations paramétriques de la droite Δ.
Puis on utilise l'équation cartésienne de P pour déterminer le paramètre du point H sur Δ.

Soit Δ la droite orthogonale à P passant par A.

Une équation cartésienne de P s'écrit $x+2y+2z-5=0$ donc le vecteur $\vec{u}(1\,;2\,;2)$ est un vecteur normal à P.
Par conséquent, comme $\Delta \perp P$, on en déduit que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ.

Un système d'équations paramétriques de la droite Δ s'écrit donc

$$\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R}).$$

Le point H est le point d'intersection de Δ et de P donc son paramètre λ vérifie l'équation :
$(3+\lambda)+2(1+2\lambda)+2(3+2\lambda)=5$ (1)

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 3+\lambda+2+4\lambda+6+4\lambda=5\\ &\Leftrightarrow 9\lambda=-6\\ &\Leftrightarrow \lambda=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

D'où $\begin{cases} x_{\mathrm{H}}=3-\frac{2}{3} \\ y_{\mathrm{H}}=1+2\times\left(-\frac{2}{3}\right) \\ z_{\mathrm{H}}=3+2\times\left(-\frac{2}{3}\right) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_{\mathrm{H}}=\frac{7}{3} \\ y_{\mathrm{H}}=-\frac{1}{3} \\ z_{\mathrm{H}}=\frac{5}{3} \end{cases}$

3°) **c**

$$\mathrm{d}(\mathrm{B},P)=\frac{|-6+2\times2+2\times1-5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{5}{3}$$

$\mathrm{d}(\mathrm{B},P)>1$ donc la sphère S ne coupe pas le plan P.

4°) **c**

La droite $\boldsymbol{D}$ admet le vecteur $\vec{u}(1\,;2\,;-1)$ pour vecteur directeur.
La droite $\boldsymbol{D}$' admet le vecteur $\vec{v}(2\,;1\,;1)$ pour vecteur directeur.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}$' ne sont pas parallèles.

Cherchons si $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}$' sont sécantes.

$\boldsymbol{D}\begin{cases} x=3+t' \\ y=1+2t' \\ z=3-t' \end{cases} (t'\in\mathbb{R}) \qquad \boldsymbol{D}'\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

On résout le système :

$$\begin{cases} 3+t'=3+2t & (1) \\ 1+2t'=3+t & (2) \\ 3-t'=t & (3) \end{cases}$$

On résout d'abord le système formé par les équations (1) et (3) (on choisit celui-ci car il est simple à résoudre).

$$\begin{cases} \cancel{3}+t'=\cancel{3}+2t & (1) \\ 3-t'=t & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t'=2t \\ 3-2t=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t'=2t \\ t=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t'=2 \\ t=1 \end{cases}$$

Regardons si l'équation (2) est vérifiée.

$1+2t'=5$ et $3+t=4$

Donc (2) n'est pas vérifiée.

On en déduit que les droites $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}$' ne sont pas sécantes.
Par conséquent, elles sont non coplanaires.

5°) **b** (plan médiateur du segment [AB]).

$$\begin{aligned} M(x\,;y\,;z)\in \boldsymbol{P} &\Leftrightarrow MA^2=MB^2\\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(3-x)^2+(1-y)^2+(3-z)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(-6-x)^2+(2-y)^2+(1-z)^2}\right)^2\\ &\Leftrightarrow -18x+2y-4z-22=0\\ &\Leftrightarrow 9x-y+2z+11=0 \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 1°) **Rappel :** O est l'origine du repère ; $2x-2y+z-1\geq 0$.

2°) a) $d(A, P)=1$ b) $(x-5)^2+(y-3)^2+z^2=1$.

c) On vérifie que $A\in \boldsymbol{E}_1$.

S est contenue dans $\boldsymbol{E}_1$.

On peut écrire $S\subset \boldsymbol{E}_1$.

Le symbole $\subset$ signifie « est inclus dans » (ou « est contenu dans », ce symbole est d'ailleurs un C allongé et stylisé).

Il ne faut pas confondre ce symbole avec le symbole $\in$, « appartient à » (symbole d'appartenance).

On écrit qu'un ensemble est inclus dans un autre.

On écrit qu'un élément appartient à un ensemble.

3°) a) $\begin{cases} x=5+2t\\ y=3-2t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=t\end{cases}$

b) D'après le cours le point H point de contact (ou point de tangence) du plan P et de la sphère S est le projeté orthogonale de A, centre de la sphère S, sur le plan P.

C'est donc le point d'intersection de la droite D, passant par A et orthogonale à P.

$H\left(\frac{13}{3}\,;\,\frac{11}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right)$

$\boxed{5}$ 1°) a) $\overrightarrow{AB}(0\,;1\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;1\,;-1)$

Il n'existe pas de réel α tel que $\overrightarrow{AC}=\alpha\,\overrightarrow{AB}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les points A, B, C ne sont pas alignés.

b) Démontrons que le vecteur $\vec{u}(3\,;4\,;-2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times 0+4\times 1+(-2)\times 2=0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times 3+1\times 4+(-2)\times(-1)=0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

On en déduit que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont deux vecteurs <u>non colinéaires</u> du plan (ABC). Par suite, le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Comme $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC), (ABC) admet une équation cartésienne de la forme $3x+4y-2z+d=0$ où d est un réel.

$A\in(ABC)$ donc $d=-3x_A-4y_A+2z_A$ d'où $d=1$.

Une équation cartésienne de (ABC) s'écrit donc : $3x+4y-2z+1=0$.

2°) **Démontrons que les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite $\boldsymbol{D}$.**

On sait que le vecteur $\overrightarrow{n_1}(2\,;1\,;2)$ est un vecteur normal à P_1 et que le vecteur $\overrightarrow{n_2}(1\,;-2\,;6)$ est un vecteur normal à P_2.

Il n'existe pas de réel β tel que $\overrightarrow{n_2}=\beta\,\overrightarrow{n_1}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles ; ils sont donc sécants suivant une droite $\boldsymbol{D}$.

Déterminons un système d'équations paramétriques de $\boldsymbol{D}$.

La droite $\boldsymbol{D}$ est définie par le système $\begin{cases}2x+y+2z+1=0\\ x-2y+6z=0\end{cases}$.

On pose $z=\lambda$.

Le système initial peut donc s'écrire $\begin{cases}2x+y+2\lambda+1=0\\ x-2y+6\lambda=0\\ z=\lambda\end{cases}$ (système linéaire de 3 équations à 3 inconnues).

Ce système est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$\begin{cases}y=-2x-2\lambda-1\\ x-2(-2x-2\lambda-1)+6\lambda=0\\ z=\lambda\end{cases}$

$\begin{cases}y=-2x-2\lambda-1\\ x+4x+4\lambda+2+6\lambda=0\\ z=\lambda\end{cases}$

$\begin{cases}y=-2x-2\lambda-1\\ x=\dfrac{-10\lambda-2}{5}\\ z=\lambda\end{cases}$

$\begin{cases}y=-2x-2\lambda-1\\ x=-2\lambda-\dfrac{2}{5}\\ z=\lambda\end{cases}$

$\begin{cases}y=-2\left(-2\lambda-\dfrac{2}{5}\right)-2\lambda-1\\ x=-2\lambda-\dfrac{2}{5}\\ z=\lambda\\ \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 2\lambda - \dfrac{1}{5} \\ x = -2\lambda - \dfrac{2}{5} \\ z = \lambda \end{cases}$$

La droite ***D*** admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -2\lambda - \dfrac{2}{5} \\ y = 2\lambda - \dfrac{1}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

b) **Démontrons que *D* // (ABC).**

Le système d'équations paramétriques de ***D*** permet de dire **q**ue le vecteur $\vec{v}(-2\,;2\,;1)$ est un vecteur directeur de ***D***.
Or on sait que le vecteur $\vec{u}(3\,;4\,;-2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 3\times(-2)+4\times 2+(-2)\times 1 = -6+8-2=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
On en déduit que ***D*** // (ABC).

$\boxed{6}$ 1°) D'après les équations cartésiennes de P et Q, on peut dire que le vecteur $\vec{u}(2\,;-1\,;0)$ est un vecteur normal à P et que le vecteur $\vec{v}(3\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal à Q.
Il n'existe pas de réel α tel que $\vec{v} = \alpha\,\vec{u}$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Par conséquent, les plans P et Q ne sont pas parallèles ; ils sont donc sécants suivant une droite ***D***.

Déterminons un système d'équations paramétriques de ***D***.

La droite ***D*** est définie par le système $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$.

On pose $z = \lambda'$ (**N.B. :** on note λ' le paramètre plutôt que λ car le paramètre λ est utilisé dans l'énoncé pour définir la droite Δ).

Le système initial peut donc s'écrire $\begin{cases} x = \dfrac{y-5}{2} \\ \dfrac{3}{2}y + y - \dfrac{15}{2} - \lambda' = 0 \\ z = \lambda' \end{cases}$ (système linéaire de 3 équations à 3 inconnues).

Ce système est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} x = \dfrac{y-5}{2} \\ \dfrac{5}{2}y - \dfrac{15}{2} - \lambda' = 0 \\ z = \lambda' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} - \dfrac{5}{2} \\ y = 3 + \dfrac{2}{5}\lambda' \\ z = \lambda' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 + \dfrac{1}{5}\lambda' \\ x = 3 + \dfrac{2}{5}\lambda' \\ z = \lambda' \end{cases}$$

La droite ***D*** admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} y = -1 + \dfrac{1}{5}\lambda' \\ x = 3 + \dfrac{2}{5}\lambda' \\ z = \lambda' \end{cases} \quad (\lambda' \in \mathbb{R})$.

D $\begin{cases} x = -1 + \dfrac{1}{5}\lambda' \\ y = 3 + \dfrac{2}{5}\lambda' \\ z = \lambda' \end{cases} \quad (\lambda' \in \mathbb{R})$

2°) D'après l'équation cartésienne de R donnée dans l'énoncé, on peut dire que le vecteur $\vec{n}(-5\,;5\,;-1)$ est un vecteur normal à R.

D'après le système d'équations paramétriques de ***D***, on peut dire que ***D*** admet le vecteur $\vec{w}\left(\dfrac{1}{5}\,;\dfrac{2}{5}\,;1\right)$ pour vecteur directeur.

$\vec{n} \bullet \vec{w} = -5\times\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}\times 5 - 1\times 1 = 0$.

Donc $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
Par conséquent, ***D*** // R.

3°) $\Delta\ \begin{cases} x=-3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}\ (\lambda\in\mathbb{R})$ $\quad \boldsymbol{D}\ \begin{cases} x=-1+\frac{1}{5}\lambda' \\ y=3+\frac{2}{5}\lambda' \\ z=\lambda' \end{cases}\ (\lambda'\in\mathbb{R})$

On sait que le vecteur $\vec{w}\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5};1\right)$ est un vecteur directeur de $\boldsymbol{D}$.

De plus, le vecteur $\vec{w'}(-3;1;2)$ est un vecteur directeur de Δ.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ ne sont pas colinéaires.
Par conséquent, $\boldsymbol{D}$ et Δ ne sont pas parallèles.

Pour savoir si $\boldsymbol{D}$ et Δ sont sécantes, on résout le système $\begin{cases} -3\lambda=-1+\frac{1}{5}\lambda' \\ 1+\lambda=3+\frac{2}{5}\lambda' \\ 2+2\lambda=\lambda' \end{cases}\ (\lambda'\in\mathbb{R})$.

………

Ce système n'admet aucun couple solution donc $\boldsymbol{D}\cap\Delta=\varnothing$.

Conclusion : $\boldsymbol{D}$ et Δ ne sont pas parallèles et leur intersection est vide. Donc elles ne sont pas coplanaires.

$\boxed{7}$ 1°) **C**

$M(-1\,;3\,;2)$

$\begin{cases} x_M=1+2t \\ y_M=2-t \\ z_M=-3-t \end{cases}\quad \begin{cases} -1=1+2t \\ 3=2-t \\ 2=-3-t \end{cases}\quad \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-5 \end{cases}$ donc $\mathbf{M}\notin\boldsymbol{D}$.

$N(2\,;\,-3\,;1)$

$\begin{cases} x_N=1+2t \\ y_N=2-t \\ z_N=-3-t \end{cases}\quad \begin{cases} 2=1+2t \\ -3=2-t \\ -1=-3-t \end{cases}\quad \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=5 \\ t=-2 \end{cases}$ donc $\mathbf{N}\notin\boldsymbol{D}$.

$R(3\,;1\,;\,-4)$

$\begin{cases} x_R=1+2t \\ y_R=2-t \\ z_R=-3-t \end{cases}\quad \begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$ donc $\mathbf{R}\in\boldsymbol{D}$ (le paramètre associé à R est égal à 1).

Le point $R(3;1;-4)$ appartient à la droite $\boldsymbol{D}$; il est associé au paramètre $t=1$.

2°) **B**

D'après le système d'équations paramétriques, le vecteur $\vec{v'}(2;-1;-1)$ est un vecteur directeur de $\boldsymbol{D}$.

Donc le vecteur $-\vec{v'}(-2;1;1)$ est aussi un vecteur directeur de $\boldsymbol{D}$.

Réponse B.

3°) **C**

Le vecteur $\vec{u}(2;-1;-3)$ est un vecteur normal à $\boldsymbol{P}$.

Le vecteur $\vec{u'}(2;-1;-1)$ est un vecteur directeur de $\boldsymbol{D}$.

$\vec{u}\cdot\vec{u'}=1\times2-1\times2+3\times1=2-2+3\neq0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas orthogonaux.

Par conséquent, la droite $\boldsymbol{D}$ n'est pas parallèle au plan $\boldsymbol{P}$. Elle est donc sécante au plan $\boldsymbol{P}$.

Réponse C.

4°) **B**

Pour le point $G(1\,;3\,;2)$, on a : $x_G+2y_G-3z_G-1=1+2\times3-3\times2-1=0$ donc $G\in\boldsymbol{P}$.

Réponse B.

5°) **B**

Le vecteur $\vec{u}(2;-1;-3)$ est un vecteur normal à $\boldsymbol{P}$.

Le vecteur $\vec{w}(4;-5;-2)$ est un vecteur normal à Q_2.

$\vec{u}\cdot\vec{w}=1\times4-5\times2-3\times(-2)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Par conséquent, $\boldsymbol{P}\perp Q_2$.

Réponse B.

6°) **A**

$$d(T\,;\boldsymbol{P})=\frac{|1+2\times(-3)-3\times2-1|}{\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+2^2}}=\frac{|-1-6-6-1|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

Réponse A.

8 1°) a) Le triangle ABC est équilatéral.

c) K est l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2°) c) $K\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$ (on utilise la formule permettant de calculer les coordonnées d'un barycentre dans l'espace)

La distance de O au plan (ABC) est égale à la distance OK ; $OK = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3°) a) $AB = BD = CD = DA = \sqrt{2}$

b) On calcule les coordonnées de Ω : $\Omega\left(\frac{1}{6}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{1}{6}\right)$.

c) $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution détaillée :

1°) a) **Description des faces du tétraèdre OABC :**

Les faces OAB, OBC et OAC sont des triangles rectangles isocèles en O.

On a : $AB = BC = AC = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) donc ABC est un triangle équilatéral.

I est le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC et J celui de la hauteur issue de B donc, comme ABC est équilatéral, I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$.

b)

c) (CI) et (BJ) sont deux hauteurs dans le triangle ABC donc leur point d'intersection K est l'orthocentre du triangle ABC.

Comme ABC est équilatéral, K est également le centre de gravité, le cercle du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit.

2°) a) Le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ est orthonormé car ses axes sont deux à deux orthogonaux et OA = OB = OC = 1.

O(0 ; 0 ; 0)

A(1 ; 0 ; 0)

B(0 ; 1 ; 0)

C(0 ; 0 ; 1)

E(1 ; 1 ; 1)

b) K est le centre de gravité de ABC donc K est la barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 1) et (C ; 1).

$$K \left| \begin{array}{l} x_K = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y_K = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{1}{3} \\ z_K = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$ (utilisation de la formule de calcul des coordonnées d'un barycentre)

$K\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{OK}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{OE}(1;1;1)$

On a : $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OE}$ donc $K \in [OE]$.

3°) a) D est le symétrique de K par rapport à O donc $D\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

$AB = BC = CA = DA = DB = DC = \sqrt{2}$

On en déduit que le tétraèdre ABCD est régulier.

b) Ω est le milieu de [OK] donc $\Omega \left| \begin{array}{l} x_\Omega = \dfrac{1}{6} \\ y_\Omega = \dfrac{1}{6} \\ z_\Omega = \dfrac{1}{6} \end{array} \right.$

On a : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.